

## 5 Modele systemów i ich zachowanie

*Nasze myślenie to operacja na modelach- mapach rzeczywistości*

- 5.1 Modele, modelowanie, symulacja
- 5.2 Typy modeli obiektów i procesów
- 5.2 Modele wzrostu systemów
- 5.3 Modele zachowania systemów z ograniczeniami strukturalnymi
- 5.4 Modele interakcji – systemy konfliktowe
- 5.5 Modele systemów złożonych
- 5.6 Prognozowanie ewolucji systemów – planowanie strategiczne
- 5.7 Podsumowanie
- 5.8 Problemy

Jak już wiemy podejście systemowe do powoływania nowych systemów charakteryzuje się intensywnym użyciem symulacji zachowania się przyszłych systemów, by przewidzieć zawczasu ich możliwy ewolucyjnie zakres niesterowalności (ryzyko funkcjonalne), dalekosiężne efekty uboczne (ryzyko środowiskowe) i stopniową utratę efektywności systemu na skutek zużycia (ryzyko awarii). Zatem Przed przejściem do koncepcyjnego projektowania systemów celowym jest zbadanie ich zachowania się w trakcie życia i \ lub działania. Bowiem jak stwierdziliśmy poprzednio niejednokrotnie system optymalny musi zachować swą optymalność w ciągu całego cyklu życia, od koncepcji poprzez fizyczną realizację, aż do kasacji i recyklingu. Zatem na ile się da, należy ilościowo i jakościowo przebadać zachowanie się systemu w całym cyklu jego istnienia. Wymaga to posiadania **pewnych** modeli ewolucji systemów, najlepiej zaś modeli ilościowych. Jeśli zaś ich nie posiadamy to zawsze jest jeszcze możliwość prognozowania zachowania się systemów metodą odpytywania ekspertów (Delphi), lub metoda scenariuszy. Załóżmy jednak tutaj, że dysponujemy ilościowymi modelami zachowania się systemów co dla systemów względnie prostych jest możliwe. Będziemy zatem niżej badać zachowanie prostych systemów obserwując je przez pryzmat wielkości sterujących, bądź tylko przez ich wielkości wejściowo - wyjściowe, bądź inne wielkości proporcjonalne do nich, tzw. **symptomy** - jeśli system nie jest bezpośrednio **obserwowalny**. Czasami jednak, jak zobaczymy niżej, znajomość struktury systemu pozwoli wydedukować jego zachowanie.

### 5.1 Modele, modelowanie, symulacja

Upraszczając nieco zagadnienie, dla pokazania istoty problemu, można powiedzieć, iż żyjemy w świecie modeli często nie wiedząc o tym. O czymkolwiek myślimy, mówimy, zawsze mamy na myśli pewne **nasze** wyobrażenie rzeczywistości fizycznej i / lub symbolicznej, czyli jej **model**. A warto na początku podkreślić, że model do realnego systemu ma się tak jak mapa do terenu, a do tego w naszej głowie są same takie '**mapy**' świata w którym żyjemy zamiast rzeczywistego 'terenu'. Czym zatem jest model systemu ?

Przypomnijmy sobie wpierrw naszą najlepszą definicję systemu, *system jest to byt przejawiający egzystencję przez synergiczną interakcję swych elementów, system działa w czasie i w przestrzeni*. Zatem,

**model jest uproszczoną reprezentacją systemu, w czasie i przestrzeni, stworzoną w zamiarze zrozumienia zachowania systemu rzeczywistego [Principia].**

Modele, z którymi mamy do czynienia w życiu i pracy mogą być rzeczywiste – fizyczne, jak np. w skali 1 : 10, i modele abstrakcyjne. Te ostatnie warto podzielić znów na dwie klasy; jakościowe (opisowe i wyjaśniające) i ilościowe – prognostyczne. W modelach jakościowych możemy zaledwie powiedzieć wstępnie **co jest jakie** (model opisowy), bądź lepiej **co od czego zależy** (model wyjaśniający – relacyjny). Modele ilościowe (kwantytatywne) są marzeniem każdego badacza systemów i z grubsza można je podzielić na deterministyczne,

rozmyte i probabilistyczne, zależnie od pewności wiedzy jaką o nich posiadamy. A co to jest **modelowanie** ? Wiąże się ono zawsze z określonym celem modelowania, jeden system może reprezentować wiele modeli. W sposób zwięzły **modelowanie to wyszukiwanie w systemie cech i związków istotnych ze względu na dany cel**. Nie jest to proste zadanie i często nazywa się to sztuką modelowania, jak tytuł ostatniej książki F. Morrisona, ‘Sztuka Modelowania Układów Dynamicznych’ [Morrison96].

Jeszcze jedno rozróżnienie sposobów modelowania byłoby to właściwe na tym etapie. Wiąże się to co z charakterem podejścia do problemu, z góry na dół (top down ) czy też z dołu do góry (bottom up). W terminologii amerykańskiej najnowszej analizy systemowej nazywa się to odpowiednio podejściem; **Macro to micro** (Mtm), oraz **micro to Macro** (mtM) Boyd [Boyd01]. W podejściu z dołu do góry (mtM) rozważamy wpierw działanie mikromodułów, używając na ogół rachunku różniczkowego lub różnicowego i odpowiedni całkując jeśli chodzi o ogląd większego obszaru lub całego systemu. W podejściu z góry na dół rozważamy cały system, układając dla niego warunki równowagi, przepływu, itd., a jeśli chodzi nam o podsystemy i moduły to w miarę potrzeby wyodrębniamy je i stosujemy te same sposoby kalkulacji równowagi i przepływów i oddziaływań kontrolno sterujących. Dając tu najprostszy z możliwych przykładów weźmy kinematykę ruchu jednostajnego punktu. W szkole podstawowej uczono nas, że przy stałej prędkości droga jest proporcjonalna do czasu ruchu, czyli  $s = v \cdot t$  jest to podejście Makro. Natomiast w szkole wyższej uczyli nas obliczać elementarny przyrost drogi w elementarnym przyroście czasu;  $ds = v \cdot dt$ , jest to podejście mikro. Obecnie wiemy iż w pierwszym przypadku trzeba zróżniczkować relację wejściową i dostaniemy ją na poziomie mikro. W drugim natomiast przypadku trzeba scałkować (np. przy zerowych warunkach początkowych) i będziemy na poziomie makro. Innym przykładem podejścia mikro może być metoda elementów skończonych (MES ang. FEM), podejścia w skali makro Metoda Elementów Brzegowych (ang. BEM), lub analizy modalnej. W wielu przypadkach wybór poziomu startowego jest kwestią preferencji, ale w niektórych przypadkach nie ma takiego wyboru z uwagi na braki metodologiczne.

Jeśli popatrzymy na rysunek 3.3 objaśniający nam sposób zdobywania wiedzy o świecie to widzimy wzajemnie udokładniającą się spiralę diady ‘eksperyment - teoria’. Tak było do lat 70 – tych, a od tego czasu zwolna rolę przejmuje triada ‘ **eksperyment – teoria – symulacja**’, symulacja z użyciem modeli ilościowych , prognostycznych, tak jak na rysunku 6.1.

Rysunek 5.1 Trójkąt ‘eksperyment – teoria – symulacja’ umożliwiający przyspieszone badania jak i projektowanie systemów złożonych [Kleiber99].

Ale znowu napotykamy tu barierę naszej niewiedzy, co to jest symulacja, czy to o czym już słyszeliśmy w dzieciństwie, gdy rodzice posądzała nas o symulację (udawanie) choroby by nie iść do szkoły ? Coś w tym sensie też, jest to udawanie że **badając model** badamy system realny. Tak więc;

***Symulacja jest to manipulowanie modelem w taki sposób że działa on w zmienionej skali w czasie i / lub w czasoprzestrzeni, umożliwiając nam uchwycenie oddziaływań i zachowań, które w innym przypadku byłyby nieuchwytne z tytułu ich oddalenia w czasie i przestrzeni.***

Ta kompresja (ekspansja) skali daje nam także stosowną perspektywę, aby uchwycić co zdarzy się w systemie, a co z tytułu jego złożoności byłoby w innym przypadku niemożliwe do obserwacji [Bellinger02]. Jest to dość długa definicja, lecz jedna z najlepszych oddająca istotę symulacji , podobnie jak definicja modelu i systemu, warto więc przytoczyć, że źródło

jest Internetowe [Bellinger02], podobnie dobre jak dla szukania zagadnień teorii systemów i cybernetyki pod Internetowym adresem [Principia].

Wiemy już jakim narzędziem jest dobry model skojarzony z możliwościami symulacji. Jak dalece jest to słuszne może przekona nas nowa szersza nazwa symulacji, Inżynieria wirtualna, stosowana zwłaszcza do badań stosowanych i projektowania wszystkiego co ma działać, w całym cyklu życia od koncepcji do reutilizacji. Są już bowiem programy komputerowe optymalizujące proces rozbiórki i reutilizacji starych samochodów, zarówno z punktu widzenia czasu jak i energii potrzebnej do rozbiórki.

Wiedząc tyle o symulacji - możliwej jeśli posiadamy dobry model, zapoznajmy się zatem z niektórymi typami modeli, a potem z przekrojem modeli systemów.

## 5.2 Typy modeli obiektów i procesów

Nasza ogólna definicja systemu ujmuje całe spektrum możliwości; od systemów materialnych przez symboliczne aż do systemów pojęciowych, których elementami są pojęcia i idee. Jak zatem mówić i jak tworzyć modele takich systemów? Wpierw ułożmy sobie dobrze w głowie tę rozmytą klasyfikację czemu na pewno sprzyja poniższy rysunek 6.2.

systemy pojęciowe

systemy rozmyte

systemy strukt.

Rys. 5.2. Ilustracja spektrum egzystencji systemów jako wstęp do ich modelowania

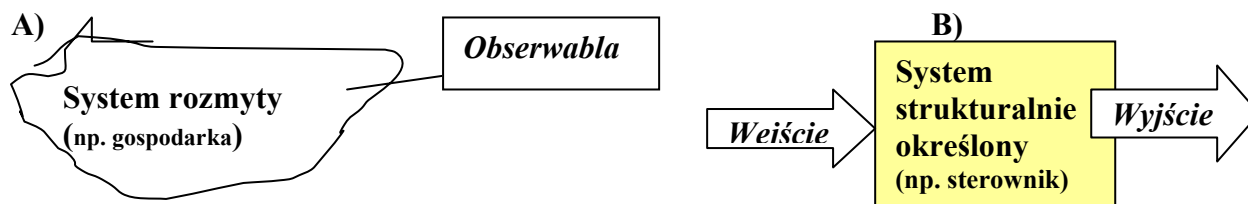
Z prawej strony mamy w pełni określone systemy, określone co do ich struktury i funkcji jakie wykonują. Zatem ich wektory wejścia i wyjścia i/lub interfejsy<sup>1</sup> są w pełni zdefiniowane i mierzalne. Idąc dalej na lewo napotykamy systemy z atrybutami (wielkości charakterystyczne opisujące system) zdefiniowanymi, lecz nie zawsze mierzalnymi (np. bioenergia). Wreszcie z prawej strony spektrum mamy systemy, które nie są w pełni obiektywnie zdefiniowane, ich definicje podsystemów i atrybutów są jeszcze w głowie projektanta lub lidera, są nie zawsze nawet w pełni wyartykułowane, świadomie lub nie. Do tej grupy należą również tzw. **modele mentalne** będące niejednokrotnie metaforami pomocnymi w myśleniu indywidualnym, zbiorowym i reprezentacji informacji i wiedzy.

Przechodząc do przykładów to można stwierdzić, że większość systemów inżynierskich, hardwarowych czy softwarowych, mieści się z prawej strony, w środku będziemy mieli systemy antropotechniczne, np. człowiek – maszyna, czy nawet socjotechniczne, przedsiębiorstwo i wyżej gospodarka, gdzie nie wszystko jest zdefiniowane i mierzalne. Z lewej zaś strony będą idee i wartości wyznawane przez uczestników systemu socjotechnicznego, np. w danym przedsiębiorstwie i/lub w gospodarce.

Pod pojęciem modelu wielu autorów umieszcza różne procesy i byty, np. sieci czynności, grafy i /lub diagramy aktywności, PERT (Program Evaluation and Review Technique), CPM (Critical Path Method) i inne służące do usprawnienia zarządzania operacjami, projektami, czy też produkcją (patrz np. [Mingus02], [Caposi01]). My jednak zawężymy pojęcie modelu do takich systemów i procesów w których da się wyróżnić wielkości obserwowalne podlegające ewolucji, na ogół ciągłej, co w procesie dalszej analizy może być poddane dyskretyzacji.

W sensie analitycznym, matematycznym, modele systemów prawostronnych (rys. 6.2) na razie trudno sobie wyobrazić, aczkolwiek widziałem już prace modelujące matematycznie system przekonań i wierzeń, np. człowieka, robota autonomicznego, androida, itp. Popatrzmy zatem na modele systemów ze środka i prawej strony rysunku 6.2, których to będziemy coraz bardziej potrzebowali i używali w inżynierii systemów. Para takich modeli jest nakreślona na kolejnym rysunku 6.3.

<sup>1</sup> Interfejsy – połączenia między podsystemami.



Rys.5.3. Modele systemów rozmytego i w pełni określonego

Model systemu **A** z lewej strony nie jest w pełni zdefiniowany, jego granice i struktura są rozmyte jak np. w gospodarce, gdzie niektórzy aktorzy deklarują płacenie podatków na "Kajmanach". W takich systemach wielkich mamy niejednokrotnie możliwość obserwacji pewnych procesów, np. przepływ towarów, pieniądza, wskaźniki giełdowe, w ekonomii lub wskaźniki i indeksy jak w psychologii i marketingu. Wtedy wcale nie jesteśmy pewni czy to co obserwujemy jest zmienną systemową, czy jest to wielkość wejściowa, czy wyjściowa, i czy daje możliwość **sterowania**<sup>2</sup> systemem. Stąd też wielkość obserwowaną w takich systemach lepiej nazwać obserwabłą, zamiast używać pojęcia zmiennej, zależnej, niezależnej czy **zmiennej stanu**<sup>3</sup>, co w matematyce i naukach inżynierskich ma jasno określone znaczenie.

Natomiast model systemu lewostronnego **B** ma w pełni określoną funkcję i strukturę, lub co najmniej dobrze określoną **funkcję przejścia**<sup>4</sup>, a jego wektory wejścia i wyjścia są zdefiniowane i **mierzalne**. Są to np. hardwarowe części maszyn i urządzeń, lub też ich układy sensomotoryczne łącznie z oprogramowaniem, gdzie warunek **niezawodnego**<sup>5</sup> działania wymusza pełną obserwowalność i pełną sterowalność systemu.

Odnosnie modeli systemów strukturalnie określonych niezbędne jest jeszcze kilka uwag o ich strukturze wewnętrznej. Otóż jeśli nasza znajomość wnętrza systemu kończy się na jego funkcji przejścia to mówimy o systemie typu **czarna skrzynka** (black box), Jeśli znamy pewne fragmenty struktury i funkcję przejścia to mówimy o szarej skrzynce (gray box), jeśli natomiast znamy całą strukturę wnętrza, to możemy znaleźć wynikowa funkcje przejścia, a typ modelu to biała skrzynka (white box).

Mając już za sobą wszystkie generalia modelowe popatrzymy obecnie na spektrum możliwych modeli systemów, od najprostszych typu modelu stanu konta, do najbardziej złożonych jak np. model ekosystemu lub cywilizacji światowej.

### 5.3 Modele wzrostu systemów

W wielu przypadkach badań systemów mamy **jeden system** ulokowany w swym otoczeniu, a jedyną obserwabłą (wielkością obserwowaną) jest stan jego wyjścia w kolejnych chwilach czasu. Wówczas na tej podstawie budujemy modele prognostyczne przyszłego zachowania się systemu dla czasu;  $t = k+1$  na podstawie zbioru danych obserwacji poprzednich  $t = 1, 2, \dots, k$ , prowadzi to do kilku interesujących modeli.

#### 5.3.1 Wzrost geometryczny systemu

Załóżmy że wielkość opisująca wyjście systemu  $x$  (stan konta, licznosc populacji, itp.) jest odczytywana w dyskretnych chwilach czasu  $t = 1, 2, \dots, k, \dots$  np. co godzinę, co miesiąc, rok, przy czym  $t = 1$  nie musi oznaczać początku życia systemu, lecz jedynie początek obserwacji.

<sup>2</sup> Byłoby tu dobrze przytoczyć definicje **obserwowalności** i **sterowalności** systemu, proszę to potraktować jako zadanie domowe możliwe do uchwycenia w każdej książce z teorii sterowania, lub w Internecie.

<sup>3</sup> Ziemne stanu – wzajemnie niezależny zespół zmiennych opisujący jednoznacznie stan systemu.

<sup>4</sup> Funkcja przejścia – relacja funkcyjna lub operatorowa między wyjściem i wejściem systemu.

<sup>5</sup> **Niezawodność** – prawdopodobieństwo wypełnienia zadanej misji systemu w zadanym czasie i warunkach.

Niech wartości kolejno odczytywane różnią się od poprzedniej o wartość stałą 'a' tak że

$$x(t+1) = a x(t), \quad a > 0. \quad (5.1)$$

Łatwo z powyższego zauważyć, że jeśli  $a = 1$  to nie notujemy żadnych zmian i możemy powiedzieć, iż obserwowany system jest statyczny. Jeśli  $a < 1$  to następuje stopniowe zmniejszanie obserwowanej wielkości, zaś najbardziej interesujący jest przypadek wzrostu wyjścia systemu jeśli  $a > 1$ . Model taki może odzwierciedlać zachowanie się różnych systemów, np. wzrost populacji ludzi, zwierząt, roślin, wzrost publikacji danej dziedziny wiedzy, konsumpcji materiałów, wzrost długu lub przyrost konta w banku. W tym ostatnim np. przypadku przyszła wartość konta -F (future) w porównaniu z obecną - P (present) przy rocznym oprocentowaniu 100i % będzie

$$F = (1 + i) P,$$

co w porównaniu do pierwotnej wartości  $P_0$  po  $n$  krokach będzie

$$F_n = (1 + i)^n P_0.$$

Ten typ wzrostu, tzn. przyrost o stały iloczyn, nazywamy wzrostem geometrycznym. Jak widać model ten może być bardzo użyteczny jeśli przyrost zmiennej niezależnej (np. czasu) jest dyskretny, co w dobie **digitalizacji** obliczeń ma często miejsce.

### 5.3.2 Model stada - demografia

Uwzględnienie przyrostu cechy systemu, np. ilości zwierząt czy ludzi w danym obszarze, podług modelu (5.1) jest zbyt uśrednione lub inaczej grube. Czasami więc dogodnie jest przyjąć, że przyrost taki dla różnych grup wiekowych stada jest różny, a to z tytułu zróżnicowanej ich funkcji, np. rozrodczości i umieralności. Załóżmy dla prostoty, że rozkład samców i samic w każdej grupie wiekowej 0, 1, 2, ..., m, (np w grupie do jednego roku, do 5 - ciu lat, itd.), jest taki sam. Pozwala nam to prowadzić rozważania tylko dla samic, a będzie to reprezentatywne dla całego stada. Oceńmy wpierw śmiertelność grupy przy jej przejściu do drugiej, np.  $i$  do  $i + 1$  - jako  $\beta_i$ . Takie zmniejszenie populacji jest słuszne dla każdej grupy wiekowej  $k$ , przy jej przejściu do następnej grupy ilość osobników zmniejsza się o współczynnik przeżycia  $\beta_i$ , tak więc

$$x_{i+1}(k+1) = \beta_i x_i(k), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (5.2)$$

gdzie  $\beta_i < 1$  można oszacować z badań statystycznych, lub też wziąć z odpowiednich tabel. Jedyną grupą wiekową, dla której nie ingeruje współczynnik przeżycia jest to najmłodsza grupa wiekowa (początkowa) w każdym etapie tzn.  $x_0(k+1)$ . Dla tej grupy wiekowej oddaje swój przyrost każda inna grupa przez stosowny współczynnik rozrodczości  $\alpha_i$ . Tak więc stan tej grupy możemy opisać równaniem

$$x_0(k+1) = \alpha_0 x_0(k) + \alpha_1 x_1(k) + \dots + \alpha_n x_n(k). \quad (5.3)$$

Mając dane współczynniki śmiertelności  $\beta_i$  i rozrodczości  $\alpha_i$  możemy wyliczyć stan każdej grupy wiekowej stada wg (5.3) a potem grupy nowonarodzonych  $x_0(k+1)$  i wreszcie dla całego wielowarstwowego stada wg formuły:

$$x = \sum_{i=0}^n x_i(k+1). \quad (5.4)$$

Pouczająca może być tu symulacja licznosci całego stada 'x' przy różnych współczynnikach śmiertelności  $\beta_i$  oraz rozrodczości  $\alpha_i$ . Będzie to z pewnością lepsze przybliżenie sytuacji

rzeczywistej niż uśredniony wzrost wg modelu geometrycznego, czy też eksponencjalnego, itp.

### 5.3.3 Różnicowy modele gospodarki

Istnieje wiele prostych modeli dynamiki wzrostu gospodarczego (np. [Findeisen85], [Rappaport86]), tutaj zaś rozważymy model dyskretny, np. kwartalny lub roczny. Do tego celu musimy zdefiniować cztery zmienne opisujące system jak niżej.

- $Y(k)$  - dochód narodowy lub korporacji,
- $C(k)$  - konsumpcja w danym okresie,
- $I(k)$  - inwestycje w danym okresie,
- $G(k)$  - wydatki państwa (korporacji) w danym okresie.

Równanie równowagi takich kosztów w czasie  $k$  jest

$$Y(k) = C(k) + I(k) + G(k) . \quad (5.5)$$

Znaczy to że całkowity przychód musi być podzielony na konsumpcję -  $C$ , inwestycje -  $I$  i wydatki rządowe -  $G$ . Jest oczywiste, że konsumpcja musi być ograniczona i stanowić część przychodu

$$C(k) = m Y(k), \quad 1 > m > 0. \quad (5.6)$$

Ponadto, jak wiemy inwestujemy by zwiększyć dochód narodowy, jeśli więc oznaczymy współczynnik wzrostu dochodu  $R > 0$  to możemy napisać;

$$\begin{aligned} Y(k+1) - Y(k) &= R I(k) , \quad ; \quad R > 0 - \text{w zmiennych dyskretnych} \\ \Delta Y(k) &= R I(k) \Delta k, \quad - \text{w przyrostach} \\ \Delta Y(t) &= R I(t) \Delta t \quad - \text{dla ciągłego czasu życia systemu } t \end{aligned} \quad (5.7)$$

Z powyższych dwu statycznych (równowagowych) równań możemy znaleźć,

$$Y(k) = C(k) + I(k) + G(k),$$

czyli

$$Y(k) = m Y(k) + I(k) + G(k). \quad (5.8)$$

Przyjmijmy dalej , że wydatki państwa są ograniczone i oczywiście proporcjonalne do przychodów, np.  $G(k) = b Y(k)$ ,  $0 \leq b < 1$ . Zatem po przekształceniach ostatecznie dostaniemy

$$Y(k+1) = [ 1+ R( 1- m -b) ] Y(k). \quad (5.9)$$

Porównując powyższe z relacją (5.1) można zauważyć, że współczynnik geometrycznego wzrostu wynosi tu:  $a = 1+R(1-m-b) < > 0$ . Przy dużych wydatkach rządowych ten wzrost może być nawet bardzo mały jeśli  $G(k)$  zbliża się do  $Y(k)$ . W konsekwencji warto by tu zasymulować jak współczynnik wzrostu 'R' i konsumpcji 'm' zmieniają sytuację ekonomiczną państwa czy też korporacji.

### 5.3.4 Wzrost eksponencjalny systemu

Jeśli do równania przyrostu geometrycznego (5.1) dodamy i odejmiemy obustronnie  $x(k)$  to uzyskamy

$$x(k+1) = a x(k) + x(k) - x(k),$$

a stąd

$$x(k+1) - x(k) = (a-1) x(k),$$

czyli

$$\Delta x(k) = R x(k), \quad R = a-1.$$

podobnie jak dla modelu gospodarki narodowej.

Przyrosty czasu są u nas jednostkowe ( $\Delta t = 1$ ), zatem ostatnie równanie różnicowe możemy zastąpić dokładnym różniczkowym gdy  $\Delta t \rightarrow 0$ , otrzymując

$$\frac{dx}{dt} = Rx(t) \quad (5.10)$$

Znaczy to że zmiany wyjścia w naszym systemie (produkt, ilość osobników, dochód) następują tak często, że możemy zastosować przejście graniczne  $\Delta t \rightarrow 0$ . Rozwiązanie powyższego równania różniczkowego jest prawie natychmiastowe, gdyż;

$$\frac{dx}{dt} = R dt, \quad \Rightarrow \quad x(t) = x(0) e^{Rt}, \quad (5.11)$$

gdzie  $x(0)$  jest wartością początkową wyjścia systemu.

Widać z powyższego że zachowanie systemu zależy istotnie od wykładnika wzrostu  $R$ ;

jeśli  $R = 0$  mamy stagnację w gospodarce (w liczności stada, itp.),

jeśli  $R < 0$  spadek dochodu

i jeśli  $R > 0$  eksponencjalny wzrost do nieskończoności, tak jak to pokazano na rysunku 5.4.

Rysunek 5.4 Zachowanie się systemu dynamicznego dla różnych wykładników wzrostu

Analizując ponownie uzyskany rezultat (5.11) dla dyskretnych wartości  $t = 0, 1, 2, \dots, k$ , zauważmy że

$$x(k+1) = x(0) e^{R(k+1)} = [x(0) e^{Rk}] e^R = x(k) e^R.$$

Znaczy to że wzrost geometryczny (5.1) jest dyskretnym wariantem wzrostu wykładniczego gdyż mamy tu w przybliżeniu;

$$a = e^R \cong 1 + R.$$

Jeśli zastosujemy tę samą filozofię przejścia z różnicą skończoną do granicy i dalej do równania różniczkowego, to dla modelu gospodarki otrzymamy

$$\frac{dY}{dt} = R(1 - m - b) Y, \quad b + m < 1,$$

a więc również model wzrostu eksponencjalnego gospodarki przy zbilansowanej konsumpcji i wydatkach rządowych.

## 5.4 Modele zachowania systemów z ograniczeniami strukturalnymi

Dotychczas rozważane modele systemów pracujących w swym otoczeniu nie wpływały z jawnie postawionej struktury modelu, a jedynie były wynikiem założonego matematycznego powiązania wielkości obserwowanych na wyjściu systemu. Na ogół również rola wejścia nie była jasno wyartykułowana, w sensie przyczynowo skutkowym. Są jednak modele, gdzie jest znane takie przyporządkowanie a wejścia i wyjścia systemu są jasno zdefiniowane. Są zatem zdefiniowane początki struktury systemu, tzn. jego wewnętrzne relacje jak i powiązanie z otoczeniem. Zajmijmy się zatem analizą zachowania takich systemów.

### 5.4.1 Układy transformujące energię

Rozważane do tej pory systemy nie miały sprecyzowanych ograniczeń strukturalnych rządzących dynamiką ich zmian. Takie ograniczenia da się wykoncytować często z głębszych zasad i powodów fizykalnych, psycho - fizycznych, ekonomicznych, socjologicznych, itp. Weźmy pod uwagę zatem system transformujący energię (moc) wejściową  $N_i$  na energię wyższego rzędu  $N_u$  - co może być produktem działania systemu [Winiwarter92], [Cempel93], lub dosłownie inną przekształconą formą energii, jak w przekładni mechanicznej, lub termo elektrowni. Przy takiej transformacji zawsze następuje **dyssypacja** (strata) energii i jej część jest eksportowana na zewnątrz systemu w postaci mocy strat  $V$ , a część jest dyssypowana i akumulowana wewnętrznie uszkadzając (zatrzuwając) sam system tak jak na rysunku 5.5.

Rysunek 5.5: Najprostszy model systemu transformującego energię z ograniczoną dyssypacją wewnętrzną [Cempel93].

Patrząc na rozptyw mocy systemu na rysunku 5.3 możemy napisać

$$N_i = N_u + N_d, \quad N_d = N_{da} + V \quad (5.12)$$

Możliwość akumulacji wewnętrznej energii zdyssypowanej, czyli uszkodzeń, są zawsze skończone, zatem nie może być ona większa niż pojemność dyssypacji systemu (objętość zbiornika na rysunku 5.3)  $E_{db}$ , czyli

$$E_{da}(\Theta) = \int_0^{\Theta} N_{da}(\theta) d\theta = \int_0^{\Theta} [N_d(\theta) - V(\theta)] d\theta \leq E_{db} \quad (5.13)$$

Tutaj i dalej własny czas życia systemu oznaczono jako  $\Theta$ . W systemie wbudowane jest dodatkowe dyssypacyjne sprzężenie zwrotne - dodatnie, tzn. takie że im więcej zdyssypowanej energii odłożono w systemie tym większa jest chwilowa dyssypacja systemu (patrz rys. 5.3). Można to ująć np. w postaci relacji różniczkowej

$$dV(\Theta) = \beta dE_{da}(\Theta, V), \quad \beta = \text{const} > 0. \quad (5.14)$$

Jest to druga relacja strukturalna systemu, zaś trzecia może dotyczyć związku między



całkowitą mocą dyssypowaną a eksportowaną i w najprostszym przypadku może mieć postać

$$\frac{dN_d}{dV} = \alpha = \text{const}, \quad \Rightarrow \quad V = \alpha^{-1} N_d + \text{const}1, \quad \alpha \geq 1. \quad (5.15)$$

Obliczając przyrost energii dyssypacji zakumulowanej wewnątrz mamy wyrażenie

$$dE_{da} = \frac{\partial E_{da}}{\partial V} dV + \frac{\partial E_{da}}{\partial \Theta} d\Theta.$$

Drugi wyraz w powyższym możemy znaleźć z (5.13) otrzymując

$$\frac{\partial E_{da}}{\partial \Theta} = N_d(\Theta) - V(\Theta),$$

zaś pierwsze będzie

$$\frac{\partial E_{da}}{\partial V} = \int_0^{\Theta} \left[ \frac{\partial N_d}{\partial V} - 1 \right] dV.$$

Zauważmy że zależność strukturalna (5.15) pozwoli nam to uprościć do

$$\frac{\partial E_{da}}{\partial V} = (\alpha - 1) \Theta,$$

gdzie przyjęto;  $\text{const}1 = 0$ . Tak więc całkowity przyrost energii zdyssypowanej wewnątrz będzie

$$dE_{da} = (\alpha - 1) \Theta dV + (N_d - V) d\Theta.$$

Wstawiając to do relacji sprzężenia zwrotnego  $dV = \beta dE_{da}$  uzyskamy równanie różniczkowe postaci

$$\frac{dV}{V} = \frac{\beta(\alpha - 1) d\Theta}{1 - \beta(\alpha - 1)\Theta} = \frac{d\Theta}{1 - \frac{\Theta}{\Theta_b}}$$

$$\Theta_b^d = [\beta(\alpha - 1)]^{-1},$$

z rozwiązaniem

$$V(\Theta) = V_0 \left(1 - \frac{\Theta}{\Theta_b^d}\right)^{-1}, \quad (5.16)$$

przedstawionym graficznie w postaci krzywej życia systemu tak jak na rysunku 5.6.

Rys 5.6: Krzywa życia systemu z ograniczoną wewnętrzną dyssypacją z widoczną awarią lub śmiercią systemu dla  $[(\Theta)/(\Theta_b)] \Rightarrow 1$ .

Jak widać z rozwiązania (5.16) i rysunku 5.4, dla czasu awarii  $\Theta_b^d$  systemu, cała jego moc dostarczona jest dyssypowana, gdyż  $V \rightarrow \infty$ . Jest to często obserwowane zjawisko w świecie systemów naturalnych i sztucznych, a podpatrzone zostało dla przypadku zużywania się maszyn obserwowanych diagnostycznie [Cempel89], [Cempel93].

Ten sposób rozumowania, tzn. wprowadzenie ograniczeń strukturalnych do modelu, jest na tyle płodny, że można wprowadzić podobne ograniczenia do strumienia energii przetworzonej  $N_u$ . Dzięki temu uzyskano nie tylko dodatkowy efekt fizycznej śmierci systemu jak poprzednio, lecz także dodatkową stopniową redukcję efektywności działania systemu. Mechanizm tego zmniejszania efektywności może być zależny od ilości energii dyssypowanej, jak i ilości energii przetworzonej, jak to się dzieje w układach recyklingu energii.

Dodatknie sprzężenie zwrotne można również wprowadzić w energię transformowaną wyższego rzędu  $N_u$ . Tą drogą można modelować mechanizm nadprodukcji maszyn w branży przemysłu maszynowego, pracę systemu komputerowego o skończonej pamięci, itp., uzyskując kolejny modele układu przetwarzającego energię (procesora energii) ekwiwalentną. Podobnie wprowadzając dodatkowe sprzężenie zwrotne do wejściowego strumienia energii można modelować układy z ograniczonym wzrostem, jak np. model gospodarki z podatkiem VAT. Więcej na ten temat można znaleźć w materiałach Międzynarodowego Sympozyjum Inżynierii Systemów [NatkeCempel95] i najnowszych pracach zespołu autora o zastosowaniach procesorów energii.

Jako rozszerzenie rozważań różnych procesorów energii założmy, że nasza definicja energii sięga daleko poza fizykę i jest ważna we wszelkich dziedzinach istnienia i aktywności we wszechświecie. Założmy zatem, że **energia to uporządkowana aktywność** [Winiwarter92], [Cempel98], zatem dla poruszającego się kamienia, jego masa i prędkość są równoważne energii, podobnie praca człowieka, jego myśli, praca grupy ludzkiej, pieniądze, itp., to wszystko formy energii równoważnej. Przy tak szerokiej definicji energii rozważana wcześniej jest też procesorem energii (PE), jednak nieadekwatnym do rzeczywistości gdyż w naszym poprzednim modelu otrzymaliśmy nieograniczony wzrost eksponencjalny. Jeśli ponownie rozważymy dynamikę i ewolucję małej jednostki produkcyjnej, np. takiej jak farma, warsztat, gdzie wejściowy strumień energii  $Y(\Theta)$  będzie się dzielił następująco (patrz rysunek 5.5).

- $G(\Theta)$  - potrzeby wyższego rzędu procesora energii pieniądze / energia wydatkowane np. na potrzeby kulturalne, edukacyjne, rekreacyjne, itp.
- $C(\Theta)$  - konsumpcja procesora energii, żywność, ubranie, utrzymanie ruchu maszyn, itp.
- $I(\Theta)$  - inwestycje w zdolność produkcyjną (przetwarzania) procesora energii, np. dodatkowa maszyna, itp.

Jeśli teraz dodatkowo opodatkujemy konsumpcję  $C(\Theta)$  podatkiem od wartości dodanej (VAT), to tą drogą uzyskamy możliwość przyspieszenia wzrostu gospodarczego, niestety z jednoczesnym przejściem do skończonego czasu przeżycia systemu;  $\theta_b < \infty$ . Jak pamiętamy poprzednio bez podatku VAT eksponencjalny wzrost systemu gospodarki trwał w nieskończoność. Zatem uwaga na podatek VAT, przyspiesza on rozwój systemu, ale nieumiejętnie dobrany prowadzi do przyspieszonej śmierci systemu.

Rysunek 5.7. Model układu transformującego energię równoważną z możliwością wzrostu systemu.

Jak podano we wstępie wokół nas można znaleźć same żyjące (pracujące) systemy naturalne i sztuczne, czyli w nowej terminologii procesory energii. Obserwując zatem w populacji takich samych systemów pewne symptomy ich życia, np. amplitudę drgań, i/lub temperaturę łożyska maszyny możemy tworzyć różnego typu statystyki, np. histogramy takich symptomów i szacować parametry rozkładów jakim one podlegają. Można pokazać teoretycznie że procesory energii z ograniczonym potencjałem dyssypacji, potencjałem produkcji ograniczonym potencjałem wzrostu podlegają rozkładowi Weibulla i Frecheta. Zatem można wnioskować odwrotnie, jeśli w pewnej populacji znajdziemy tego typu rozkłady to można wnioskować iż obserwowane systemy mają w sobie zaimplementowany pewien typ procesora energii z ograniczonym potencjałem, dyssypacji, produkcji, wzrostu, lub wszystkie łącznie. Jeśli w ten sposób popatrzymy na opisy statystyczne otaczającej nas rzeczywistości, sztucznej i naturalnej, to znajdziemy wiele wspólnego i w większości przypadków możemy stwierdzić że ich życie opiera się na przetwarzaniu pewnej energii ekwiwalentnej. Ten typ wnioskowania stoi za rysunkiem i tabelą eksponowaną niżej, zgodnie z [Winiwarter92]. Zaś dla powstałego na tej podstawie modelu życia i ewolucji można znaleźć bardzo dużo interpretacji kosmologicznych i psycho i socjotechnicznych, tak jak to wynika z rysunku 5.8, [Winiwarter92].

Rys. 5.8 Systemy kosmo i socjotechniczne o podobnych własnościach wejścia / wyjścia jak model procesora energii z ograniczoną wewnętrzną dyssypacją energii.

Dla maszyn jednego typu w różnych fazach życia procesora energii, można poczynić dodatkowe rozważania przekształcające rozkłady obserwowanego symptomu, np. drgań, na niezawodność symptomową i na wynikający stąd resztkowy czas życia pojedynczego obiektu na którym zaobserwowano dana wartość symptomu. Są to jednak już specyficzne zagadnienia diagnostyki, w które nie będziemy głębiej wchodzić (patrz np. [Natke97,r2.3]).

#### 5.4.2 Systemy z nasyceniem charakterystyk

Po początkowym okresie wzrostu obserwabli wiele cech systemów wchodzi w okres stopniowego nasycenia, hamowania, mając asymptotę w osi równoległej do czasu, przeciwnie niż systemy przetwarzające energię. Tak się dzieje np. z popytem na większość towarów i usług, a także z liczbą populacji danego gatunku w obliczu ograniczoności zasobów (np. na wyspie). Warto więc zbadać to zagadnienie nieco głębiej i wyciągnąć z niego wnioski prognostyczne. Równanie różniczkowe, które może opisywać taki samo hamowany popyt  $q$  w kategoriach prędkości wzrostu jego ma postać

$$\frac{dq}{d\Theta} = g \frac{q}{L} \left(1 - \frac{q}{L}\right), \quad q > 0. \quad (5.17)$$

Widać tu, że popyt jest proporcjonalny do początkowego ' $q/L$ ' ale jednocześnie do

pozostałego (resztkowego) popytu  $(L-q)/L$ . Jego rozwiązanie możliwe do uzyskanie przez rozdzielenie zmiennych ma postać **krzywej logistycznej**

$$q(\Theta) = L \left[ 1 + \left( \frac{L}{q_0} - 1 \right) \exp(-g\Theta) \right]^{-1}, \quad (5.18)$$

gdzie;  $q_0 = q(0)$ , a  $L = q_{\max}$ .

Krzywą logistyczną można również przekształcić przez logarytmowanie i zamianę zmiennych do postaci liniowego wzrostu jak niżej,

$$\ln \frac{q(\Theta)}{L - q(\Theta)} = \ln \frac{q_0}{L - q_0} + g\Theta, \quad \text{czyli ogólnie: } X = A + g\Theta,$$

lub do liniowej regresji - co może być istotne w prognozowaniu.

Graficzne zobrazowanie postaci krzywej logistycznej przedstawia rysunek 5.9, gdzie również zaznaczono jej wartości charakterystyczne; amplitudowe nasycenie i czasowe załamanie popytu  $\Theta_{kr}$ .

Rysunek 5.9: Logistyczna krzywa popytu jako rozwiązanie modelu systemu z hamowaniem [Hall68].

Jak widać z rysunku poziom asymptotycznego nasycenia produktem (usługą) wynosi  $L$ , a czas przełomu wzrostu popytu

$$\Theta_{kr} = \frac{1}{g} \ln \left( \frac{L}{q_0} - 1 \right).$$

Zatem znając popyt początkowy  $q_0$  i szacując maksymalny  $L$  oraz prędkość wzrostu popytu  $g$ , można wyznaczyć niezbędne parametry do optymalizacji strategii produkcji, sprzedaży, usług, podobnie jak wydolność środowiska do utrzymania gatunku zwierząt lub ludzi.

## 5.5 Modele interakcji - systemy konfliktowe

Wielokrotnie systemy (osobniki, organizacje) współdziałają z otoczeniem będącym podobnym lub nieco większym systemem. Stąd oba systemy można ująć w jeden większy metasystem w którym działają w interakcji dwa konfliktowe systemy. Zbadamy obecnie kilka takich przypadków.

### 5.5.1 Wyścig zbrojeń

Rozważmy dwa systemy (państwa lub organizacje),  $X$  i  $Y$ , których potencjał niszczący równoważny budżetowi zbrojeniowemu wynosi odpowiednio  $x$  i  $y$ . Załóżmy że szybkość zmiany nakładów na zbrojenia jest regulowana jako różnica własnych nakładów i postrzeganych przez wywiad nakładów przeciwnika, tak więc możemy napisać [Rappaport86]

$$\frac{dx}{dt} = -mx + ay, \quad \frac{dy}{dt} = -ny + bx, \quad a, b, m, n > 0. \quad (5.19)$$

Podstawowym problemem jest tutaj stabilność zbrojeń i rozwoju gospodarczego czyli

utrzymywanie ich na stałym poziomie tolerowalnym dla ogólnego rozwoju obu systemów. Z badań tego problemu [Rappaport86] okazuje się, że poziomy nakładów na zbrojenia mogą być stabilne jeśli

$$m n - a b > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{a} \frac{n}{b} > 1,$$

a więc stopień własnych nakładów do postrzeganych cudzych ( $m/a$ ,  $n/b$ ) musi być nieco większy od jedności. To zapewnia, że po obustronnym zredukowaniu poziomu nakładów wyścig zbrojeń nie wybuchnie od nowa.

Czytelnikowi pozostawia się znalezienie innych analogii wyścigu zbrojeń np. w dziedzinie nakładów na badania, reklamy, promocję, itp.

### 5.5.2 Model drapieżnika i ofiary

Łatwo sobie wyobrazić, że przy nieobecności drapieżnika  $x$  (np. wilk) populacja kóz będzie rosła do nieskończoności, lub też przy ograniczoności zasobów zgodnie z krzywą logistyczną (patrz poprzednia sekcja). Modelując to zagadnienie konfliktowe (również dwie konkurencyjne firmy) zauważmy, że każde spotkanie drapieżnika i ofiary (koza) powiększa biomasa drapieżników a pomniejsza biomasa stada kóz. Częstość tych spotkań wpływa również dodatnio na biomasa drapieżników a ujemnie na biomasa ofiary. Tak więc można to zamodelować jak niżej [Rappaport86]

$$\frac{dx}{dt} = -c x + a x y, \quad \text{- biomasa drapieżnika bez ofiary maleje} \quad (5.20)$$

$$\frac{dy}{dt} = +r y - p x y, \quad \text{- biomasa ofiary bez drapieżnika rośnie .}$$

Zauważmy, że drugie równanie łatwo przechodzi w równanie logistyczne jeśli  $x \rightarrow y$ , tzn. zamiast drapieżnika wprowadzamy ofiarę jako zjadacza ograniczonych zasobów.

Dzieląc stronami przez siebie oba równania mamy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(r - p x)}{x(a y - c)},$$

co doprowadza do pożądanego rozdziału zmiennych

$$(a - c / y) dy = (r / x - p) dx ,$$

i rozwiązania

$$y^c x^r e^{-a y} e^{-p x} = \text{const.} \quad (5.21)$$

Rozwiązanie to przedstawia zamknięte krzywe (trajektorie) (patrz rysunek 5.8) wokół punktu równowagi:

$$x_0 = r/p, y_0 = c/a,$$

jeśli tylko spełniony jest warunek stabilności:  $ap - rc > 0$ .

W tym przypadku rozwiązania naszego modelu oscylują (na płaszczyźnie  $x, y$ ) na stabilnych trajektoriach wokół punktu równowagi. Dla tego przypadku rozwiązań oscylacyjnych (drgań) w biologii, można znaleźć wiele analogii w zagadnieniach oscylacji w mechanice, elektronice, itp.

Rysunek 5.10: Stabilne rozwiązania problemu drapieżca - ofiara wokół punktu równowagi

Zagadnienie współistnienia dwu konfliktowych populacji można dalej wzbogacić przez hamowanie rozwoju drapieżcy wprowadzając ujemny człon kwadratowy, jak w krzywej logistycznej. Znane są również uogólnienia na  $N$  populacji konfliktowych [Findeisen85]. Nieco bardziej skomplikowany jest model symbiozy organizmu z pasożytem, lecz zostawimy go tu na uboczu polecając stosowną literaturę [Rappaport86].

### 5.5.3 Model urbanizacji

Jako ostatni rozważmy **model urbanizacji** w kraju. Niech  $P_r$  reprezentuje populację ludzi na wsi, zaś  $P_u$  populację ludzi miasta. Niech dalej ' $r$  i  $u$ ' oznaczają odpowiednie stopy przyrostu ludności (na osobę i na jednostkę czasu np rok) zaś ' $m$ ' współczynnik migracji ludzi do miasta. Przy tych założeniach możemy zestawić następujący model ewolucji obu populacji [Rappaport86].

$$\frac{dP_r}{dt} = (r - m) P_r(t), \quad \frac{dP_u}{dt} = m P_r(t) + u P_u(t). \quad (5.22)$$

Na ogół jesteśmy zainteresowani bezpośrednio nie ludnością wsi i miasta lecz ich proporcją. Niech zatem odzwierciedla to nowa zmienna

$$S(t) = \frac{P_u(t)}{P_r(t)},$$

co na mocy ostatniego równania różniczkowego daje

$$\frac{dS}{dt} = (u + m - r) S(t) + m,$$

z rozwiązaniem

$$S(t) = \frac{m}{u + m - r} * \exp [(u + m - r) t - 1]. \quad (5.23)$$

Jak widać z powyższego iloraz ludności miasta do wsi nie musi rosnąć w nieskończoność i może uzyskać wartość stałą

$$S_{lim} = \frac{M}{R - (u + m)} = const,$$

jeśli tylko  $u + m < r$ , tzn. jeśli stopień wzrostu populacji wsi rośnie szybciej niż miejski.

Model urbanizacji można jeszcze wzbogacić wprowadzając obecnie częstą migrację zwrotną z miasta na wieś: -  $m P_u$  do równania drugiego, co prowadzi do krzywej logistycznej ilorazu ludności [Rappaport86], a więc znowu do sytuacji ustalonej, stabilnej. Czytelnik z pewnością znajdzie inne, lepsze analogie do modelu urbanizacji, np. przepływy międzygałęziowe w ekonomii, itp.

Tyle przykładów typowych systemów w interakcji, czy to w dosłownym biologicznym zjadaniu, wzajemnej ekonomicznej konkurencji i tym podobnych problemach życia i współżycia. Przejdziemy zas obecnie niżej do bardziej złożonych i nieliniowych systemów, bliższych życiu systemów wielkich.

## 5.6 Modele systemów złożonych

Jak już wspominaliśmy w latach 70 – tych zaszła istotna możliwość użycia komputerów do badań zachowania się systemów złożonych. Wpierw było to możliwe w dużych ośrodkach badawczych typu MIT w USA, a potem w przemyśle. Pojawiły się pierwsze modele problemów świata, tak jak je wtedy postrzegano, demografia wyżywienie ludzkości, zanieczyszczenie środowiska. Pionierem w tych badaniach był Jay FORRESTER z Massachusetts Institute of Technology (MIT), autor słynnej książki World Dynamics [Forrester72], również członek **Klubu Rzymskiego**.

W chwili obecnej modele te są znacznie bardziej rozbudowane i wieloprzekrojowe, o czym za chwilę. Popatrzmy jednak na wstępie na model ujmujący populację świata -x, konsumpcję – z, i zanieczyszczenie środowiska – y. Trzy najprostsze równania różniczkowe ujmujące ten model, w ślad za skryptem [Jischa77], przedstawiono niżej

$$\dot{x} = b \frac{xz}{y} - dxy, \quad \dot{z} = cyz(1 - kyz), \quad \dot{y} = exz - a, \quad \text{gdy; } y > 1, \quad \text{oraz } \dot{y} = exz - ay \quad \text{poza}$$

przedziałem, (5.24),

ze współczynnikami wzrostu:

a – odnowy środowiska, b- urodzeń, c – konsumpcji, d – śmiertelności, e – zanieczyszczenie środowiska, k – ograniczenie konsumpcji.

Kolejny rysunek 5.9 pokazuje tu efekty symulacji wykonane za pomocą programu MATLAB®, ze współczynnikami pokazanymi na rysunku. Jak widać, pogorszenie opieki zdrowotnej – d, daje od razu spadek populacji -x, podobnie jak pogorszenie ochrony środowiska - a.

Rys. 5.11. Populacja, zanieczyszczenie środowiska i konsumpcja świata ujęte w jednym modelu, i wstępne efekty symulacji<sup>6</sup>.

Popularyzacja komputerów osobistych i użytkowanie ich do symulacji naukowych i gospodarczych sprawiły, że pojawiło się wiele firm oferujących gotowe programy symulacyjne wielu złożonych problemów projektowania, eksploatacji, a na koniec i programy edukacyjne. Wystarczy tu wymienić niektóre: **Stella**, **Ithink**, **Vensim**, **Microworlds** [HPS], **LogicEcoModeler**, **Swarm**, możliwe do uchwycenia w Internecie z darmowymi (free of charge) programami typu ‘demo’, które potrafią uczyć jak rozwiązać podstawowe problemy, ze słynną ‘**grą piwną**’ na czele. Gra piwna [Senge98], to problem logistyki w układzie: sprzedawca – hurtownik – browar, gdzie jasno widać iż opóźnienia w dostawach i brak informacji prowadzi nieuchronnie do znacznych zakłóceń w całym systemie niezależnie od dobrej woli uczestników, rozwiązaniem jest tu jedynie podejście systemowe; **myśl globalnie**

<sup>6</sup> Efekt symulacji programem **miniwelt.m** dostępnym u autora.

**– działaj lokalnie.**

Dla wyobrażenia sobie jak skomplikowane są współczesne modele symulacyjne proszę przeanalizować jeden z przekrojów modelu demograficznego świata, tak jak na rysunku 5.12, pamiętając jednocześnie, że niektóre gałęzie tego modelu jak żywność (food), zanieczyszczenie (pollution), są same podobnie skomplikowanymi modelami. Zachęcam do pobawienia się tymi modelami, nawet dla rozrywki<sup>7</sup>, zobaczymy wtedy jak wielka jest nasza niewiedza, osobista jak i grupowa.

Rys. 5.12 Jeden z przekrojów symulacyjnego modelu demograficznego świata w ujęciu firmy **Ventana Systems Inc.** [HPS].

Mówiąc o modelach systemów wymieniliśmy dwa typy modeli jakościowych, opisowe i relacyjne, które w tym ostatnim przypadku zdają sprawę z faktu ‘co od czego zależy’, co nie jest takie proste ani oczywiste w systemach złożonych. Jako przykład proszę przeanalizować ujęcie systemu kształcenia na Wydziale (Rys. 5.13), w którym jesteśmy zanurzeni i proszę powiedzieć czy on jest prosty i czy jest pełny. Rysunek ten to zaledwie jeden z przekrojów systemu kształcenia, a sam system i jego funkcjonowanie będzie lepiej zrozumiałe jeśli przeanalizujemy kolejny (rys. 5.14) przedstawiający przyczynowo skutkowe powody i efekty działalności kadry Wydziału. Z rysunków tych widać dopiero skalę problemów jakie wynikają w zarządzaniu współczesnymi organizacjami, gdzie w grę wchodzi nastawienia i motywacje różnych pracowników różnego szczebla, kompetencji ulokowanych w różnych pośrednich hierarchiach władzy i zależności, role struktury i przepływu pieniądza.

Rys. 5.13 Uproszczony model funkcjonalny systemu kształcenia wydziału Uczelni Wyższej.

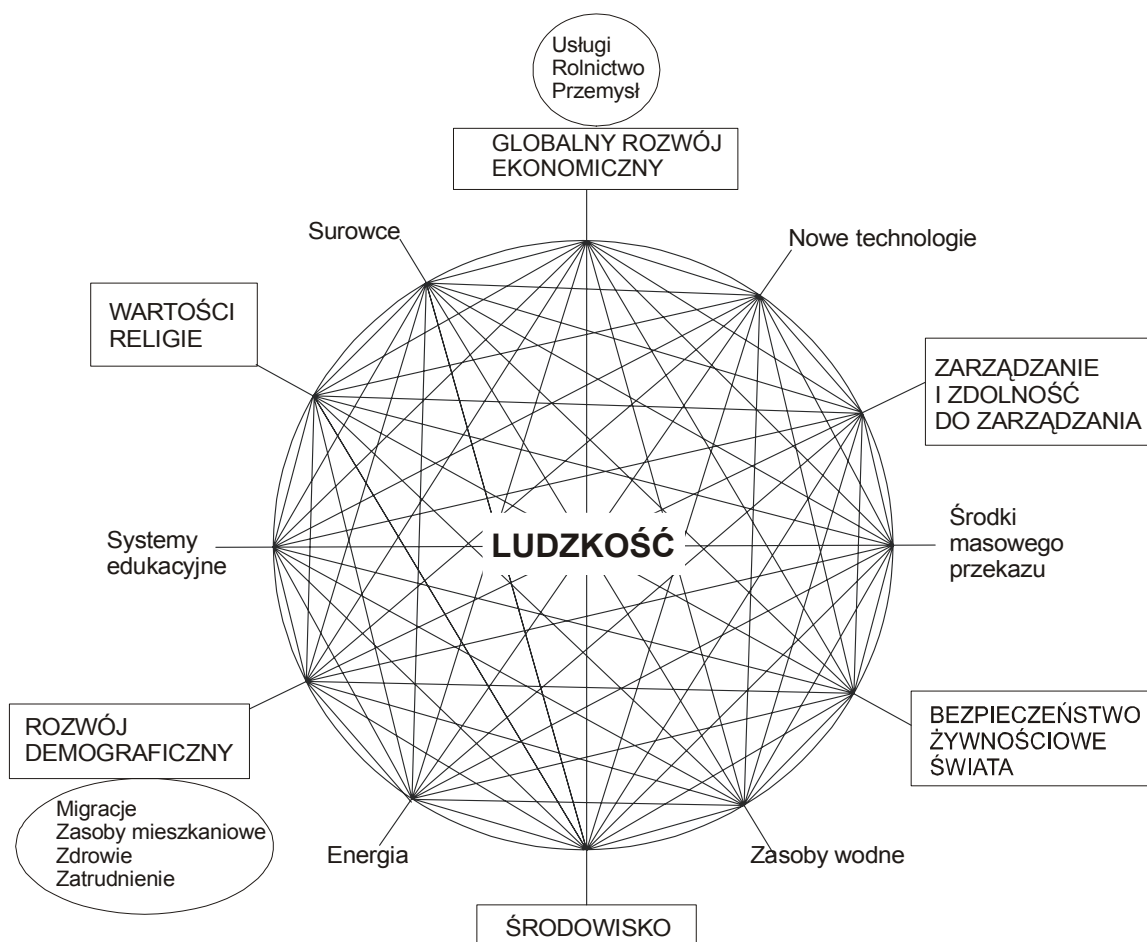
Rys. 5.14 Struktura sprzężeń współzależności finansowo motywacyjnych Wydziału.

---

<sup>7</sup> Wersja ‘demo’ tego programu na CDRROM do wypożyczenia u autora.



## Świat jako system globalny



Rys. 5.15 Ludzkość jako system heterarchiczny ze wskazaniem głównych metasystemów i determinant naszej cywilizacji [Sienkiewicz02]. **Do tej samej grupy modeli systemów złożonych, bez jasno określonej struktury i przepływów należy heterarchiczny model ludzkości (cywilizacji), tak jak na rysunku 5.15, [Sienkiewicz02]. Wyjaśnia on jedynie co może wpływać na co, nawet bez podania kierunku dominującego wpływu. Zatem można go nazwać modelem pojęciowym w myśl lewej strony rysunku 5.2.**

### 5.7 Prognozowanie ewolucji systemów - planowanie strategiczne

Prognozowanie zachowania systemów, czyli znajdowanie przyszłych wartości wejść/wyjść jest proste jeśli znamy model systemu to znaczy mamy w pełni określone równanie rządzące systemem i jego współczynniki liczbowe, co nie jest takie proste. Bowiem np. można mieć znajomość typu modelu, bez znajomości jego współczynników, które wymagają identyfikacji eksperymentalnej, bądź badań statystycznych na wiarygodnej populacji obiektów, czy też populacji społecznej.

### 5.7.1 Prognozowanie przy znanym typie modelu

Mamy zatem sytuację iż wiemy jaki typ zależności oddaje najlepiej zachowanie naszego systemu, że np. jest to wzrost exponencjalny, lub logarytmiczny, jak niżej

$$y(\theta) = f(\theta, e); \text{ np.}; \quad y(\theta) = A \ln \alpha \theta \quad (5.25)$$

i my nie znamy ani skali  $A$  ani też wykładnika  $\alpha$ .

Dla dyskretnych odczytów czasu:  $n\Delta\theta = 1, 2, 3, \dots$  z krokiem  $\Delta\theta$  możemy napisać prognozę wyjścia dla czasu  $n\Delta\theta$  jak niżej

$$y(n\Delta\theta) = f(n\Delta\theta, e),$$

jeśli znamy  $f(\cdot)$  oraz  $e$ , co na ogół nie ma miejsca.

Jeśli oprócz tego monitorujemy wyjście systemu, to nasze obserwacje będą zawsze nieco różne, o wielkość związaną z dokładnością naszego modelu, zakłóceniami pomiarowymi, itp. Tak więc zamiast  $y(n\Delta\theta)$  otrzymamy wartość symptomu  $S(n\Delta\theta)$ , co możemy zapisać w postaci związku

$$S(n\Delta\theta) = y(n\Delta\theta) + N_n.$$

Tutaj  $N_n$  jako zakłóceniem pomiaru  $n$ , lub różnicą między prognozą modelu i obserwacją bowiem;

$$N_n = S(n\Delta\theta) - y(n\Delta\theta).$$

Minimalizując obecnie sumę takich różnic od początku obserwacji, np. metodą najmniejszych kwadratów, możemy dokonać oszacowania naszych pozostałych parametrów struktury systemu, na podstawie obserwacji systemu rzeczywistego, patrz np. specjalne programy Statistica®, Statgraf®, itp. Tą drogą, nawet bez znajomości modelu, możemy postulować typy zachowania się wyjścia, np. funkcją liniowo kwadratową, logarytmiczną, itp. i wyliczając współczynniki strukturalne modelu wybrać typ modelu dający najmniejszy błąd, (bliżej patrz np. [Morrison96]).

Rys 5.16 Cząstkowe elementy ewolucji atrybutów złożonego systemu dla ilościowego prognozowania i przykładowa synteza jego globalnej krzywej życia [Schroeder81].

Powracając obecnie do prognozowania ilościowego zachowania się systemów, weźmy pod uwagę systemy złożone, dla których modele rozpatrywane w tym rozdziale mogą być słuszne jedynie cząstkowo - w małym fragmencie ich czasu życia. Sytuację tę ilustruje rysunek 5.16, [Schroeder81], pokazujący różne możliwe fragmenty krzywej życia systemu i możliwą ich syntezę jak na rysunku e. Łatwo tu zauważyć, że każdy z fragmentów pokazanych na rysunku rozważany był jako model ilościowy w tym rozdziale, a ich kombinacja może być na pierwszy rzut oka trudna do identyfikacji.

Z tych też powodów, a także zbyt małej ilości danych dla krzywych cząstkowych, rozwinęły się bardzo metody prognozowania ilościowego zachowania się systemów przy założeniu nieznajomości ich modelu. Takie metody bazują tylko na zaobserwowanym przeszłym zachowaniu systemu, czyli na szeregach czasowych atrybutów systemu zaobserwowanych w równych odstępach czasu (rocznie, kwartalnie, itp). Nie mając tu miejsca na rozważenie wszystkich istotnych metod prognozowania szeregów czasowych weźmy pod uwagę jedynie regresję liniową, do której można sprowadzić wzrost liniowy oraz eksponencjalny i logistyczny jeśli poddamy krzywą obustronnemu logarytmowaniu ( patrz na inną formę krzywej logistycznej (5.17)). Oczekiwany liniowy wzrost atrybutu systemu można zatem w wielu przypadkach ująć prostym równaniem

$$y = A + B x \quad (5.26)$$

gdzie 'y' estymowana krzywa życia systemu, A - wartość początkowa, B - nachylenie prostej. Jeśli dysponujemy n odczytami  $y_i = y(x = x_i)$ , to estymatory współczynników a i b możemy znaleźć z wzorów [Greń78], [Morrison96].

$$A = \frac{\sum y_i}{n} - b \frac{\sum x_i}{n}, \quad B = \frac{n \sum x_i y_i - [\sum x_i][\sum y_i]}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (5.27)$$

Jak już wcześniej wspomnieliśmy tą drogą możemy poszukiwać zależności funkcyjnej dla szeregu czasowego o trendzie liniowym lub eksponencjalnym. Więcej na ten interesujący temat można znaleźć w specjalistycznych książkach z ekonometrii oraz z analizy szeregów czasowych, a także w specjalistycznych programach komputerowych np, STATGRAPHICS®, itp. Tutaj zaś na zakończenie przytoczymy charakterystykę różnych metod prognozowania zaczerpniętą z monografii Schroedera [Schroeder81], tak jak na poniższym rysunku.

Rys.5.17. Porównanie efektywności prognozowania różnych metod szeregów czasowych, [Schroeder81].

### 5.7.2 Prognozowanie bez znajomości modelu – planowanie strategiczne

Nie we wszystkich przypadkach projektowania systemów ich model jest oczywisty jak wyżej, tzn. zdolny również do prognozowania. A jeśli nawet tak jest, to może być on słuszny jedynie w małym fragmencie interesującego nas czasu ewolucji. Stąd też warto spojrzeć jak systemy działaniowe, a zwłaszcza ich systemy nadrzędne mogą ulegać zmianom. Zanim jednak do tego dojdziemy zastanówmy się wpieryw jakie mogą być generalnie cele, rodzaje i zakresy prognozowania i jakie może (musi) być generalnie myślenie o przyszłości. Wyjaśnia to dobrze rysunek rozpoczynając od długoterminowego prognozowania strategicznego, na ogół jakościowego niezbędnego na szczeblu decyzji w korporacji, a kończąc na ilościowym prognozowaniu operacyjnym dotyczącym konkretnych zamówień, w konkretnym oddziale produkcyjnym. Jak widać z rysunku myślenie o przyszłości zaczyna się wpieryw od wyekstrahowania istotnych czynników ekonomicznych, społecznych i politycznych, które będą kształtować przyszłość i przechodzi dalej w uszczegółowienie obszaru i problemu prognozy.

Rysunek 5.18. Myślenie o przyszłości jako początek prognozowania różnego szczebla [Sage92].

Wyżej zilustrowaliśmy problem rozwoju systemów w czasie ich cyklu życia i współdziałania ze środowiskiem lub metasyystemem. Pozwoli nam to właściwie dobrać model ewolucji podsystemu odpowiednio do analizowanej sytuacji projektowej, w poszukiwaniu ewolucji nowego systemu w jego całym cyklu życia.

## **5.8 Podsumowanie**

Modele to nasz sposób myślenia o rzeczywistości, ale jeśli chcemy tą rzeczywistość ulepszać, czy zmieniać to nasze modele muszą poprawnie odzwierciedlać stosowne fragmenty rzeczywistości, i oprócz tego być analityczno prognostyczne. Prześledziliśmy zatem najważniejsze pojęcia związane z modelowaniem otaczającej nas rzeczywistości, od modeli pojęciowych aż do ilościowych prognostycznych, od prostych obserwacji aż do systemów złożonych, takich jak model ewolucji świata ludzkiego. Nabyliśmy przekonania, że każdy model jest przydatny, bo model pojęciowy porządkuje nasze myślenie, a model analityczny systemu ułatwia nam badanie jego ewolucji i przyszłych stanów systemu.

## **5.9 Problemy**

1. Przypomnij sobie definicję systemu i jego modelu
2. Jakie typy modeli systemów potrafisz wyróżnić
3. Na czym polega modelowanie interakcji systemów
4. Co dają modele prognostyczne systemów
5. Pomyśl o swej przyszłości w myśl scenariusz rys 5.18