7.1.1. Przedmiot dynamiki

Dynamika jest działem mechaniki, który zajmuje się badaniem zależności między ruchem ciał materialnych i siłami wywołującymi ten ruch. Podstawą dynamiki są prawa Newtona przytoczone w punkcie 1.2. Aby prawa te były słuszne, w mechanice newtonowskiej ruch odnosimy do układów inercjalnych.

Z tych praw wynika, że dotyczą one punktu materialnego. W dynamice prawa te będziemy stosować nie tylko do punktu materialnego, ale także – po ich odpowiednim przekształceniu – do układu punktów materialnych, ciała sztywnego i bryły sztywnej.

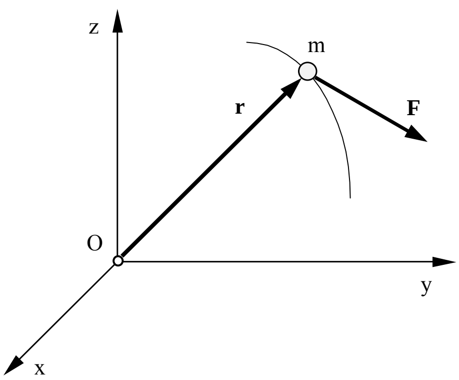
Badanie ruchu punktu materialnego o masie m i przyśpieszeniu **a**, na który działa siła **F**, sprowadza się do analizy drugiego prawa Newtona:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \tag{7.1}$$

Powyższe równanie jest dynamicznym równaniem ruchu punktu materialnego.

Jeżeli wektor wodzący rozpatrywanego punktu materialnego poprowadzony z początku O nieruchomego układu współrzędnych x, y, z (rys. 7.1) oznaczymy przez **r**, to, jak wiadomo z kinematyki, przyśpieszenie **a** jest drugą pochodną względem czasu wektora wodzącego. Zatem równanie (7.1) przyjmie postać:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}. \tag{7.2}$$



Rys. 7.1. Ruch punktu materialnego pod działaniem siły

Jest to wektorowe równanie różniczkowe ruchu punktu materialnego. W prostokątnym układzie współrzędnych, przedstawionym na rys. 7.1, równaniu temu odpowiadają trzy skalarne dynamiczne równania ruchu punktu materialnego.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \; m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \; m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z. \tag{7.3}$$

W równaniach tych x, y, z są współrzędnymi wektora wodzącego **r**, czyli współrzędnymi punktu materialnego, a F_x, F_y, F_z współrzędnymi siły **F** w przyjętym układzie współrzędnych.

Dynamiczne równania ruchu punktu materialnego (7.3) są w ogólnym przypadku układem trzech równań różniczkowych i stanowią podstawę analizy dynamiki punktu materialnego. Rozróżniamy tutaj dwie grupy zagadnień, które omówimy w następnych punktach.

7.1.2. Pierwsze podstawowe zagadnienie dynamiki

Pierwsze podstawowe zagadnienie dynamiki polega na wyznaczaniu siły działającej na poruszający się znanym ruchem punkt materialny. Jest ono również znane jako *zagadnienie proste dynamiki*. Jego rozwiązanie wynika bezpośrednio z drugiego prawa Newtona i nie nastręcza większych trudności. Jeżeli znamy równanie ruchu punktu materialnego w postaci:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),$$

to w wyniku dwukrotnego różniczkowania względem czasu otrzymujemy przyśpieszenie tego punktu:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\,\mathbf{r}}{dt}$$

i po podstawieniu tej zależności do równania (7.1) otrzymujemy siłę, a właściwie wypadkową wszystkich sił działających na dany punkt:

$$\mathbf{F} = m\frac{d^2\,\mathbf{r}}{dt^2}. \tag{7.4}$$

Przykład 7.1. Punkt materialny o masie m porusza się w płaszczyźnie xy zgodnie z równaniami ruchu: $x = 3\cos 2\pi t, y = 4\sin \pi t$, gdzie t jest czasem. Wyznaczyć współrzędne siły działającej na ten punkt w funkcji współrzędnych punktu x, y.

Rozwiązanie. Po zrzutowaniu wektorów występujących w równaniu (7.4) na osie x i y otrzymujemy współrzędne siły działającej na nasz punkt materialny, które wyrażają wzory:

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad F_y = m\frac{d^2y}{dt^2}. \tag{a}$$

Po dwukrotnym zróżniczkowaniu względem czasu równań ruchu otrzymujemy:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -12\pi^2\cos 2\pi t = -4\pi^2 x,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -4\pi^2\sin \pi t = -\pi^2 y.$$

Po podstawieniu otrzymanych wyników do wzorów (a) otrzymujemy ostatecznie:

$$F_x = -4m\pi^2 x, \quad F_y = -m\pi^2 y.$$

7.1.3. Drugie podstawowe zagadnienie dynamiki

Drugie podstawowe zagadnienie dynamiki polega na wyznaczaniu ruchu punktu materialnego poddanego działaniu znanej siły. Widzimy, że zagadnienie to jest odwróceniem pierwszego zagadnienia dynamiki i stąd jest ono również znane pod nazwą – *zagadnienie odwrotne dynamiki*.

Zagadnienie to jest znacznie trudniejsze niż pierwsze, ponieważ aby wyznaczyć równanie ruchu punktu $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ przy znanej sile **F**, należy scałkować równanie różniczkowe (7.2) lub równoważny temu równaniu układ trzech skalarnych równań różniczkowych (7.3). Z kursu matematyki wiadomo, że operacja taka nie jest jednoznaczna i aby otrzymać rozwiązanie jednoznaczne, należy wyznaczyć stałe całkowania. W tym celu musimy znać wartości funkcji i jej pochodnej (zwane *warunkami początkowymi*) w pewnej chwili t_0 (w chwili początkowej):

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad \frac{d\mathbf{r}(t_0)}{dt} = \mathbf{v}_0 \ . \tag{7.5}$$

Znacznie większe trudności przy poszukiwaniu równania ruchu punktu materialnego mogą wynikać z faktu, że w przypadku ogólnym siła **F** działająca na punkt może być jednocześnie funkcją czasu t, położenia punktu **r** i prędkości **v** punktu. Wtedy dynamiczne równanie ruchu punktu (7.2) należy zapisać w postaci:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(t,\mathbf{r},\mathbf{v}). \tag{7.6}$$

Rozwiązanie ogólne tego równania różniczkowego lub równoważnego mu układu równań skalarnych w przyjętym układzie współrzędnych jest bardzo trudne i tylko w nielicznych przypadkach udaje się otrzymać rozwiązanie ścisłe. Jeżeli nie znamy rozwiązania równań różniczkowych, stosujemy metody przybliżone lub numeryczne. W dalszym ciągu ograniczymy się do rozpatrzenia prostych przykładów, w których siła **F** będzie stała oraz będzie funkcją tylko jednej zmiennej – czasu, położenia lub prędkości.

Przykład 7.2. Punkt materialny o masie m porusza się pod wpływem stałej siły **F** = const. Wyznaczyć jego prędkość $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ oraz równanie ruchu $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$; jeżeli czas $t = 0$, to $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ i $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$.

Rozwiązanie. Dynamiczne równanie ruchu punktu (7.2) możemy przedstawić w postaci:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\mathbf{F}}{m} \text{ lub } \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{m}.$$

Po scałkowaniu otrzymamy:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{F}}{m}\int dt = \frac{\mathbf{F}}{m}t + \mathbf{C}_1. \tag{a}$$

Po podstawieniu w tym równaniu $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ oraz ponownym całkowaniu mamy:

$$\mathbf{r} = \int\left(\frac{\mathbf{F}}{m}t + \mathbf{C}_1\right)dt = \frac{\mathbf{F}}{2m}t^2 + \mathbf{C}_1\,t + \mathbf{C}_2. \tag{b}$$

Stałe całkowania $\mathbf{C}_1$ i $\mathbf{C}_2$ wyznaczamy z podanych warunków początkowych przez podstawienie do równań (a) i (b) $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ oraz $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ dla t = 0

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{v}_0,\ \ \mathbf{C}_2 = \mathbf{r}_0.$$

Ostatecznie prędkość punktu oraz równanie ruchu mają postać:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{F}}{m}t, \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0\,t + \frac{\mathbf{F}}{2m}t^2. \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

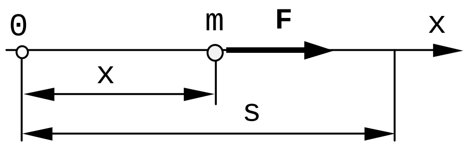
Z otrzymanych rezultatów wynika, że gdy siła **F** będzie równa zeru, to punkt będzie się poruszał zgodnie z pierwszym prawem Newtona, czyli ruchem jednostajnym po linii prostej.

Przykład 7.3. Punkt materialny o masie m = 1 kg porusza się po linii prostej wzdłuż osi Ox (rys. 7.2) pod wpływem siły $F = 10(1-t)\,[N]$, gdzie t jest czasem liczonym w sekundach. Po ilu sekundach punkt zatrzyma się i jaką drogę przebędzie w tym czasie, jeżeli w chwili początkowej t = 0 jego prędkość v_0 = 20 cm/s.

Rozwiązanie. Ponieważ punkt materialny porusza się wzdłuż osi Ox, dynamiczne równanie jego ruchu możemy zapisać w postaci skalarnego równania różniczkowego
.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F,$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=10(1-t)$$



Rys. 7.2. Wyznaczenie drogi punktu materialnego

lub

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{10}{m}(1-t). \tag{a}$$

Po scałkowaniu tego równania otrzymujemy prędkość punktu:

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{10}{m}\left(t-\frac{t^2}{2}\right)+C_1. \tag{b}$$

Po podstawieniu do równania (b) warunku początkowego $v = v_0$ dla $t = 0$ wyznaczamy stałą całkowania $C_1 = v_0$. Zatem prędkość punktu wyraża wzór:

$$v=\frac{dx}{dt}=v_0+\frac{10}{m}\left(t-\frac{t^2}{2}\right)=0{,}2+10\left(t-\frac{t^2}{2}\right)\left[\frac{m}{s}\right]. \tag{c}$$

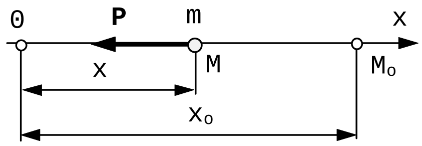
Czas, po którym punkt się zatrzyma, obliczymy, podstawiając we wzorze (c) $v = 0$. Stąd otrzymujemy równanie kwadratowe ze względu na czas t:

$$t^2-2t-0{,}04=0. \tag{d}$$

Po obliczeniu pierwiastków tego równania i odrzuceniu pierwiastka ujemnego otrzymujemy czas, po którym punkt się zatrzyma: $t_1 = 2{,}02$ s. Drogę przebytą przez punkt materialny obliczymy, całkując równanie (b) w granicach od 0 do t_1.

$$s=\int_0^{t_1}\left[v_0+\frac{10}{m}\left(t-\frac{t^2}{2}\right)\right]dt=v_0t_1+\frac{5}{m}t_1\left(1-\frac{t_1}{3}\right)=10{,}74\text{m}.$$

Przykład 7.4. Punkt materialny o masie m jest przyciągany do środka O z siłą o wartości $P = \alpha m/x^4$ (rys. 7.3), gdzie α jest wartością stałą. Wyznaczyć prędkość punktu w chwili, gdy jego odległość $x = OM$ od punktu O będzie równa $x_0/2$, jeżeli w chwili początkowej (dla $t = 0$) $x = x_0$, $v = v_0 = 0$.



Rys. 7.3. Wyznaczenie prędkości punktu materialnego

Rozwiązanie. Na rozpatrywany punkt działa tylko siła **P**, wobec tego jego równanie różniczkowe ma postać:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\alpha m}{x^4},$$

czyli

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\alpha}{x^4}. \qquad \text{(a)}$$

Po podstawieniu w powyższym równaniu:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v$$

otrzymamy:

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{\alpha}{x^4},$$

a po rozdzieleniu zmiennych

$$vdv = -\alpha\frac{dx}{x^4}. \qquad \text{(b)}$$

Po scałkowaniu tego równania w granicach od 0 do v oraz od x_0 do $x_0/2$ otrzymamy:

$$\int_0^v vdv = -\alpha\int_{x_0}^{\frac{1}{2}x_0}\frac{dx}{x^4},$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{7\alpha}{3x_0^3}.$$

Stąd prędkość punktu

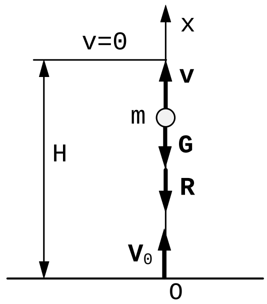
$$v = \sqrt{\frac{14\alpha}{3x_0^3}}. \qquad \text{(c)}$$

Czytelnikowi pozostawiamy wyznaczenie równania ruchu punktu.

Przykład 7.5. Ciało o masie m = 2 kg rzucone pionowo do góry z prędkością początkową v_0 = 30 m/s pokonuje opór powietrza **R**, którego wartość przy prędkości v [m/s] wynosi 0,4v [N]. Obliczyć, po ilu sekundach ciało osiągnie najwyższe położenie H. Przyjąć przyśpieszenie ziemskie g =10 m/s^2.

Rozwiązanie. Na ciało działają siły ciężkości i oporu powietrza i obie są skierowane w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu (rys. 7.4). Zatem równanie różniczkowe ruchu ma postać:

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg - 0{,}4v,$$



Rys. 7.4. Rzut pionowy z uwzględnieniem oporu powietrza

a po podstawieniu danych liczbowych możemy napisać:

$$\frac{dv}{dt} = -(10 + 0{,}2v). \qquad (a)$$

Po rozdzieleniu zmiennych w równaniu (a) mamy:

$$\frac{dv}{10 + 0{,}2v} = -dt\,. \qquad (b)$$

Po scałkowaniu tego równania w granicach od v_0 do 0 oraz od 0 do t, uporządkowaniu i zastąpieniu różnicy logarytmów logarytmem ilorazu otrzymujemy czas, po którym ciało osiągnie najwyższe położenie:

$$\frac{1}{0{,}2}\int_{v_0}^{0}\frac{0{,}2dv}{10 + 0{,}2v} = -\int_0^t dt,$$

$$t = 5\ln\frac{10 + 0{,}2v_0}{10} = 5\ln 1{,}6 = 2{,}35s.$$

7.1.4. Zasada d'Alemberta

Po przeniesieniu obu wyrazów występujących w dynamicznym równaniu ruchu punktu materialnego (7.1) na jedną stronę otrzymamy:

$$\mathbf{F} - \mathrm{m}\,\mathbf{a} = 0.$$

Po wprowadzeniu do tego równania zamiast –m**a** fikcyjnej siły zwanej *siłą bezwładności* lub *siłą d'Alemberta,* $\mathbf{P}_b = -\mathrm{m}\,\mathbf{a}$, otrzymamy zasadę d'Alemberta dla punktu materialnego:

$$\mathbf{F} + \mathbf{P}_b = 0, \qquad (7.7)$$

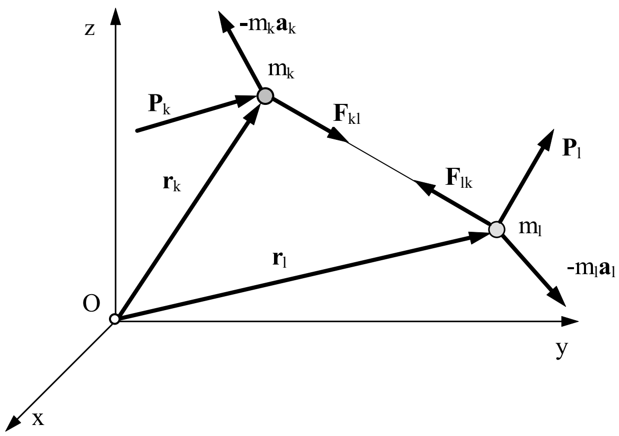
którą słownie wyrażamy następująco:

Suma sił rzeczywistych i siły bezwładności działających na punkt materialny jest w każdej chwili równa zeru.

Z zasady tej wynika, że poprzez formalne wprowadzenie siły bezwładności zagadnienie dynamiczne można sprowadzić do zagadnienia statycznej równowagi sił.

Przedstawioną wyżej zasadę d'Alemberta dotyczącą swobodnego punktu materialnego zastosujemy do układu n punktów materialnych. W tym celu rozpatrzmy układ n punktów materialnych o masach m_k i przyśpieszeniach $\mathbf{a}_k$. Na poszczególne punkty rozpatrywanego układu materialnego mogą działać siły zewnętrzne i wewnętrzne.

Zgodnie z podziałem wprowadzonym w statyce (p. 3.1.2)
siłami wewnętrznymi ami rozpatrywanego układu materialnego, a siłami zewnętrznymi siły pochodzące od innych punktów lub ciał nie należących do naszego układu materialnego. Na rysunku 7.5 zaznaczono siły działające na dwa punkty o masach m_k i m_l. Siły zewnętrzne zastąpiono tutaj siłami wypadkowymi $\mathbf{P}_k$ i $\mathbf{P}_l$, a siły wzajemnego oddziaływania między tymi punktami oznaczono przez $\mathbf{F}_{kl}$ i $\mathbf{F}_{lk}$. Zgodnie z trzecim prawem Newtona siły te są równe co do wartości, ale mają przeciwne zwroty: $\mathbf{F}_{kl} = -\mathbf{F}_{lk}$.



Rys. 7.5. Siły zewnętrzne, wewnętrzne i bezwładności działające na punkty układu materialnego

Siłę $\mathbf{F}_k$ działającą na k-ty punkt możemy przedstawić w postaci sumy siły zewnętrznej $\mathbf{P}_k$ i wypadkowej wszystkich sił wewnętrznych $\mathbf{P}_{wk}$:

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{P}_k + \mathbf{P}_{wk}\,, \tag{7.8}$$

gdzie

$$\mathbf{P}_{wk} = \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{n} \mathbf{F}_{kl}\,. \tag{7.9}$$

Po oznaczeniu siły bezwładności działającej na rozważany punkt przez

$$\mathbf{P}_{bk} = -m_k\,\mathbf{a}_k$$

zasadę d'Alemberta dla dowolnego punktu układu materialnego możemy przedstawić w postaci równania:

$$\mathbf{P}_k + \mathbf{P}_{wk} + \mathbf{P}_{bk} = 0 \quad (k = 1,2,\ldots,n). \tag{7.10}$$

Suma sił zewnętrznych, wewnętrznych oraz siły bezwładności działających na dowolny punkt układu materialnego jest w każdej chwili równa zeru.

Jeżeli równanie (7.10) napiszemy dla każdego punktu materialnego i dodamy stronami, to otrzymamy:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_k + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_{wk} + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_{bk} = 0\,. \tag{a}$$

Występująca w tym równaniu suma wszystkich sił wewnętrznych dowolnego układu materialnego zgodnie ze wzorem (3.3) jest równa zeru:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_{wk} = 0 . \tag{7.11}$$

Zatem równanie (a) przyjmie postać:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_{k} + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_{bk} = 0 . \tag{7.12}$$

Pomnóżmy teraz wektorowo każde z n równań (7.10) przez wektor wodzący $\mathbf{r}_k$ i dodajmy wszystkie równania stronami. W wyniku tej operacji otrzymamy równanie momentów:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{P}_k + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{P}_{wk} + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{P}_{bk} = 0 . \tag{b}$$

Ponieważ siły wewnętrzne, zgodnie z trzecim prawem Newtona, działają parami $\mathbf{F}_{kl} = -\mathbf{F}_{lk}$, i wzdłuż jednej prostej, to suma momentów tych sił dla całego układu materialnego względem dowolnego bieguna redukcji jest równa zeru:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{P}_{wk} = 0 \tag{7.13}$$

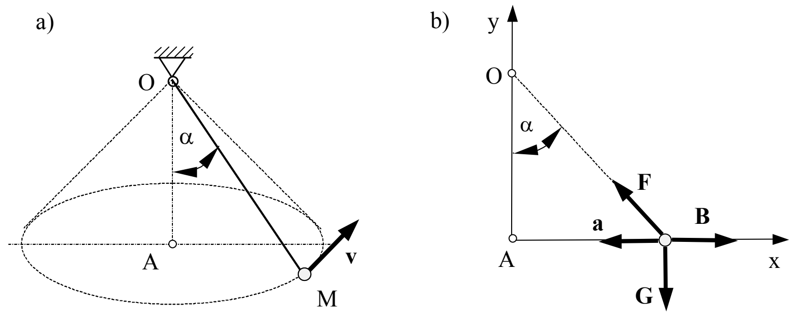
i równanie (b) przyjmuje postać:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{P}_k + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{P}_{bk} = 0 . \tag{7.14}$$

Orzymane równania (7.12) i (7.14) przedstawiają zasadę d'Alemberta dla układów materialnych, którą można sformułować następująco:

Suma sił zewnętrznych i sił bezwładności dla danego układu materialnego oraz sumy momentów tych sił względem nieruchomego bieguna redukcji w każdej chwili są równe zeru.

Przykład 7.6. Punkt materialny M o ciężarze G = 10 N, zawieszony w nieruchomym punkcie O na lince o długości OM = s = 30 cm, tworzy wahadło stożkowe, tzn. zatacza okrąg w płaszczyźnie poziomej, przy czym linka tworzy z pionem kąt $\alpha = 60^{\circ}$ (rys. 7.6a). Wyznaczyć siłę $\mathbf{F}$ w lince oraz prędkość $\mathbf{v}$ punktu M.



Rys. 7.6. Wyznaczenie siły w lince i prędkości punktu

Rozwiązanie. Na punkt materialny działa siła ciężkości **G**, siła w lince **F** oraz siła bezwładności (odśrodkowa) $\mathbf{B} = -m\mathbf{a}$, gdzie **a** jest przyśpieszeniem dośrodkowym (rys. 7.6b). Zgodnie z zasadą d'Alemberta (7.10) suma tych sił musi być równa zeru:

$$\mathbf{G} + \mathbf{F} + \mathbf{B} = 0\,.$$

Z rzutu tych sił na osie x i y otrzymujemy dwa równania równowagi:

$$\left.\begin{aligned} \sum P_{kx} &= -F\sin\alpha + ma = 0, \\ \sum P_{ky} &= F\cos\alpha - G = 0. \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

Z drugiego równania otrzymujemy siłę w lince:

$$F = \frac{G}{\cos\alpha} = \frac{10}{\cos 60^\circ} = 20\ \text{N}\,.$$

Po podstawieniu do pierwszego równania (a) wzoru na przyśpieszenie dośrodkowe:

$$a = \frac{v^2}{AM} = \frac{v^2}{s\sin\alpha}$$

otrzymamy równanie:

$$-F\sin\alpha + \frac{G}{g}\frac{v^2}{s\sin\alpha} = 0\,.$$

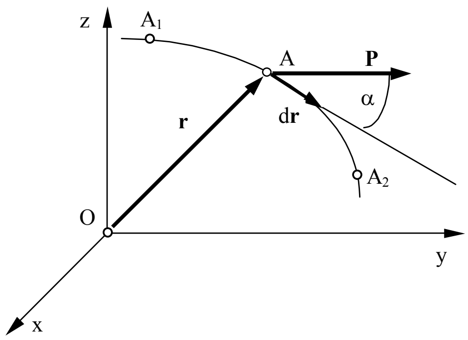
Stąd prędkość punktu M

$$v = \sqrt{\frac{F}{G} gs\sin\alpha} = \sqrt{\frac{gs}{\cos\alpha}}\sin\alpha = \sqrt{\frac{9{,}81\cdot 0{,}3}{\cos 60^\circ}}\sin 60^\circ = 2{,}1\,\text{m/s}\,.$$

7.1.5. Praca. Praca w zachowawczym polu sił. Energia potencjalna

Pracą mechaniczną nazywamy energię dostarczoną z zewnątrz za pomocą układu sił do rozpatrywanego układu materialnego w czasie jego ruchu. Celem ogólnego zdefiniowania pracy rozpatrzymy ruch punktu materialnego po torze krzywoliniowym pod wpływem siły **P**. Punkt przyłożenia A siły **P** jest opisany wektorem wodzącym **r** (rys. 7.7).

Pracą elementarną siły **P** na przesunięciu elementarnym d**s**, równym przyrostowi promienia wodzącego d**r**, nazywamy iloczyn skalarny siły **P** i przemieszczenia d**r**:



Rys. 7.7. Ilustracja do definicji pracy

$$dL = \mathbf{P} \cdot d\,\mathbf{r} \tag{7.15}$$

lub korzystając z definicji iloczynu skalarnego

$$dL = Pdr\cos\alpha = (P\cos\alpha)dr\,. \tag{7.16}$$

Jednostką pracy w układzie SI jest dżul równy pracy 1 niutona na przesunięciu 1 metra:

$$J = N \cdot m = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2},$$

a w układzie technicznym kilogram siły razy metr:

$$1\ kG \cdot m = 9{,}81\ J.$$

Mimo oznaczenia pracy elementarnej symbolem powszechnie używanym na oznaczenie różniczki zupełnej należy pamiętać, że praca elementarna nie jest na ogół różniczką zupełną żadnej funkcji.

Na podstawie wzorów (7.15) i (7.16) można sformułować poniższe wnioski.

a) Pracę wykonuje jedynie składowa siły styczna do toru, a praca składowej normalnej jest równa zeru.

b) Wartość pracy może być zarówno dodatnia, jak i ujemna: dla $\alpha < \pi/2$ jest dodatnia, a dla $\alpha > \pi/2$ ujemna.

c) Jeżeli na punkt materialny działa układ sił $\mathbf{P}_k$, których suma jest równa wypadkowej $\mathbf{W} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_k$, to praca tej siły na przesunięciu elementarnym d**r** jest równa sumie prac elementarnych poszczególnych sił na tym przesunięciu:

$$dL = \mathbf{W} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{P}_1 \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{P}_2 \cdot d\mathbf{r} + \cdots + \mathbf{P}_n \cdot d\mathbf{r}.$$

d) Praca elementarna siły **P** na przesunięciu wypadkowym $d\mathbf{r} = \sum_{k=1}^{n} d\mathbf{r}_k$ jest równa sumie prac elementarnych tej siły na przesunięciach składowych:

$$dL = \mathbf{W} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r}_2 + \cdots + \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r}_n.$$

Jeżeli wektory występujące po prawej stronie równania (7.15) przedstawimy za pomocą współrzędnych:

$$\mathbf{P} = P_x\,\mathbf{i} + P_y\,\mathbf{j} + P_z\,\mathbf{j}, \quad d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k},$$

to pracę elementarną możemy przedstawić w postaci:

$$dL = P_x dx + P_y dy + P_z dz. \tag{7.17}$$

Jeżeli punkt przyłożenia A siły **P** przemieści się po krzywej od punktu A_1 do A_2, to na podstawie wzoru (7.17) praca wykonana przez siłę **P** będzie całką krzywoliniową:

$$L_{12} = \int_{A_1 A_2} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A_1 A_2} \left(P_x dx + P_y dy + P_z dz\right). \tag{7.18}$$

Występująca w powyższym wzorze siła może w ogólnym przypadku być funkcją czasu t, położenia w przestrzeni punktu A oraz prędkości tego punktu. Współrzędne siły **P** będą zatem funkcjami czasu, zmiennych x, y, z oraz ich pochodnych względem czasu. Wtedy we wzorze (7.18) możemy podstawić:

$$dx = \frac{dx}{dt}dt, dy = \frac{dy}{dt}dt, dz = \frac{dz}{dt}dt$$

i zamiast całki krzywoliniowej otrzymamy całkę oznaczoną w granicach całkowania od t_1 do t_2

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \left(P_x \frac{dx}{dt} + P_y \frac{dy}{dt} + P_z \frac{dz}{dt} \right) dt. \tag{7.19}$$

Ze względu na zastosowania bardzo ważny jest przypadek, gdy siła **P** jest jedynie funkcją położenia (miejsca):

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{r}),$$

a jej współrzędne są wziętymi ze znakiem minus pochodnymi cząstkowymi funkcji U względem współrzędnych x, y, z:

$$P_x = -\frac{\partial U}{\partial x},\ P_y = -\frac{\partial U}{\partial y},\ P_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{7.20}$$

Wykażemy, że funkcja skalarna U(x, y, z) ma sens fizyczny energii. Praca elementarna siły o współrzędnych (7.20)

$$dL = \mathbf{P}\cdot d\,\mathbf{r} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot d\,\mathbf{r} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right).$$

Wyrażenie występujące w nawiasie po prawej stronie powyższego równania jest różniczką zupełną funkcji U:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\,. \tag{7.21}$$

Z matematyki wiadomo, że całka krzywoliniowa z różniczki zupełnej jest równa różnicy wartości końcowej i początkowej zróżniczkowanej funkcji. Zatem pracę wykonaną przez siłę **P** na jej przemieszczeniu z punktu A_1 do A_2 wyraża wzór:

$$L_{12} = -\int_{A_1A_2} dU = -\left(U_2 - U_1\right) = U_1 - U_2\,. \tag{7.22}$$

Widzimy, że praca wykonana przez siłę opisaną wzorem (7.20) na przemieszczeniu jej z położenia początkowego do końcowego jest równa ubytkowi funkcji U. Funkcję tę nazywamy *potencjałem* albo *energią potencjalną*, siłę **P** spełniającą warunek (7.20) *siłą potencjalną* lub zachowawczą, a pole sił *polem potencjalnym* lub zachowawczym.

Potencjał w określonym punkcie przestrzeni jest równy pracy, którą wykonują siły potencjalne przy przemieszczaniu punktu materialnego z danego punktu do punktu, w którym potencjał jest równy zeru. Ponieważ punkt ten może być obrany dowolnie, potencjał jest określony z dokładnością do dowolnej stałej C. Wnika to z tego, że funkcja:

$$U' = U + C$$

również spełnia zależności (7.20) i (7.22).

Ze wzoru (7.22) wynikają dwie ważne własności sił potencjalnych.

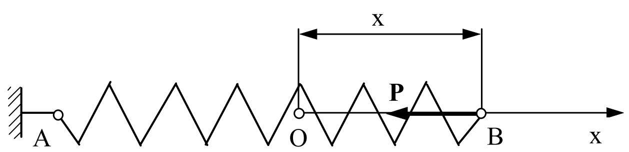
a) Praca siły potencjalnej nie zależy od toru jej punktu przyłożenia, lecz jedynie od położenia tego punktu w chwilach początkowej i końcowej.

b) Praca wykonana przez siłę potencjalną jest równa ubytkowi energii potencjalnej wynikającemu z przemieszczania się punktu przyłożenia siły. Wynika stąd również, że praca po torze zamkniętym jest równa zeru.

7.1.6. Przykłady sił potencjalnych

Siły sprężystości

Wykażemy obecnie, że siły odkształcenia sprężystego są siłami potencjalnymi. W tym celu rozpatrzymy sprężynę śrubową, której koniec A jest unieruchomiony, a koniec B może się przemieszczać wzdłuż osi Ox (rys. 7.8). Założymy, że w chwili, gdy sprężyna nie jest napięta, koniec B pokrywa się z punktem O.



Rys. 7.8. Przykład siły sprężystej wykonującej pracę

Jeżeli wydłużymy sprężynę o wartość x, to zgodnie z prawem Hooke'a będzie ona działać na punkt B siłą **P** proporcjonalną do wydłużenia:

$$\mathbf{P} = -kx\,\mathbf{i}\,,$$

gdzie współczynnik proporcjonalności k jest nazywany *stałą sprężyny*, a znak minus oznacza, że siła **P** jest skierowana przeciwnie do kierunku odkształcenia sprężyny.

Z powyższego wzoru wynika, że współrzędna siły **P** jest funkcją tylko współrzędnej x:

$$P = -kx\,,$$

zatem potencjał U musi spełniać równanie:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{dx} = -P = kx\,.$$

Po scałkowaniu tego równania w granicach od O do x_1 otrzymujemy wzór na potencjał siły sprężystej:

$$U = \int_0^{x_1} kx = \frac{1}{2}kx_1^2\,. \tag{7.23}$$

Pracę siły sprężystej na skończonym przesunięciu, np. od 0 do x, można obliczyć ze wzoru (7.22), przy czym dla x = 0 energia potencjalna $U_1 = 0$. Zatem

$$L_{12} = -U_2 = -\frac{1}{2}kx_1^2\,. \tag{7.24}$$

Siły ciężkości

Jeżeli rozpatrzymy ograniczony obszar przestrzeni w pobliżu powierzchni Ziemi o małych wymiarach w porównaniu z promieniem Ziemi, to można przyjąć, że na każdy punkt materialny o masie m znajdujący się w tej przestrzeni działa stała siła ciężkości:

$$\mathbf{G} = m\mathbf{g},$$

gdzie **g** jest przyśpieszeniem ziemskim. Przy takim założeniu pole sił jest jednorodnym polem sił ciężkości. Gdy w takim polu sił przyjmiemy układ współrzędnych x, y, z o osi z skierowanej pionowo w górę, to zgodnie z rys. 7.9 współrzędne siły ciężkości **G** opisują zależności:

$$G_x = G_y = 0, G_z = -mg. \tag{7.25}$$

Ze wzoru (7.20) wiadomo, że współrzędne sił potencjalnych są równe pochodnym cząstkowym potencjału U względem współrzędnych wziętych ze znakiem minus:

$$G_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad G_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad G_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -mg. \tag{7.26}$$

Z powyższych równań wynika, że potencjał U jest jedynie funkcją zmiennej z. Po podstawieniu trzeciego równania (7.26) do wzoru (7.21) otrzymujemy różniczkę potencjału pola sił ciężkości:

$$dU = mgdz,$$

a po scałkowaniu tego równania potencjał sił ciężkości

$$U = mgz + C, \tag{7.27}$$

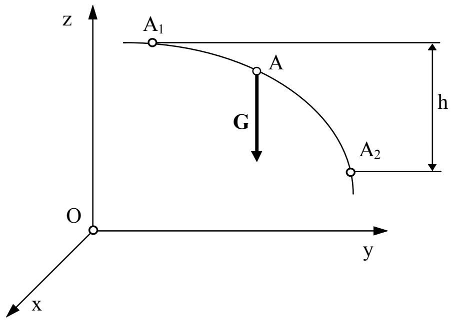
gdzie C jest dowolną stałą.

Ze wzoru (7.27) wynika, że dla z = const potencjał U jest również stały. Zatem w przypadku sił ciężkości wszystkie punkty każdej płaszczyzny poziomej mają taką samą wartość potencjału. Powierzchnie, których punkty mają te same wartości potencjału, nazywają się powierzchniami ekwipotencjalnymi.

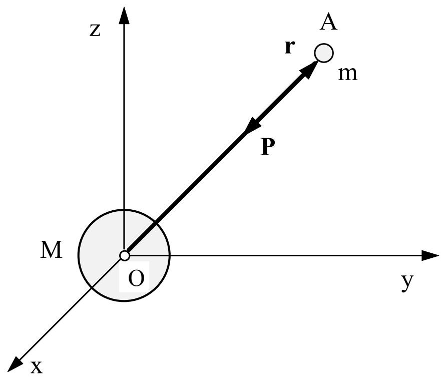
Praca siły ciężkości na dowolnym krzywoliniowym torze jest – zgodnie ze wzorem (7.22) – równa różnicy potencjałów w położeniu początkowym i końcowym:

$$L_{12} = U_1 - U_2 = mg(z_1 - z_2) = mgh, \tag{7.28}$$

gdzie h jest różnicą wysokości (rys. 7.9).



Rys. 7.9. Praca siły ciężkości



Rys. 7.10. Siła wzajemnego przyciągania

Siły wzajemnego przyciągania

Wykażemy, że siła, z jaką nieruchomy punkt materialny o masie M działa na dowolny punkt materialny o masie m, jest siłą potencjalną. Zgodnie z prawem powszechnego ciążenia (1.2) punkt M działa na punkt m i odwrotnie z siłą **P** o wartości

$$P = k\frac{Mm}{r^2}, \tag{7.29}$$

gdzie k jest stałą grawitacji, a r jest odległością masy m od nieruchomej masy M.

Jeżeli masę M umieścimy w początku układu współrzędnych x, y, z, a masę m w punkcie A o wektorze wodzącym **r** (rys. 7.10), to siłę **P** można opisać wzorem:

$$\mathbf{P} = -k\frac{Mm}{r^2}\mathbf{1_r}, \tag{7.30}$$

gdzie $\mathbf{1}_r$ jest wektorem jednostkowym o kierunku wektora **r**.

Gdy współrzędne wektora wodzącego **r** oznaczymy przez x, y, z, to współrzędne siły **P** będą następujące:

$$P_x = -k\frac{Mm}{r^2}\frac{x}{r},\ P_y = -k\frac{Mm}{r^2}\frac{y}{r},\ P_z = -k\frac{Mm}{r^2}\frac{z}{r}. \tag{7.31}$$

Łatwo wykazać, że potencjałem omawianego pola sił jest funkcja

$$U(x,y,z) = -k\frac{Mm}{r} + C = -k\frac{Mm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + C. \tag{7.32}$$

przy czym C jest dowolną stałą. Aby siła **P** była potencjalna, jej współrzędne (7.31) muszą spełniać wzory (7.20). Po zróżniczkowaniu funkcji (7.32) względem x otrzymamy:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -kMm\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} = \frac{kMmx}{r^3} = k\frac{Mm}{r^2}\frac{x}{r} = -P_x\,.$$

Postępując podobnie w odniesieniu do y i z, otrzymamy:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = k\frac{Mm}{r^2}\frac{y}{r} = -P_y\,,\quad \frac{\partial U}{\partial z} = k\frac{Mm}{r^2}\frac{z}{r} = -P_z\,.$$

Pracę wykonaną przez siłę **P** na przemieszczenie masy m z położenia 1 do 2 zgodnie ze wzorem (7.22) i po uwzględnieniu równania (7.32) zapiszemy w następującej postaci:

$$L_{12} = U_1 - U_2 = kMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right). \tag{7.33}$$

7.1.7. Moc i sprawność

Z technicznego punktu widzenia interesuje nas często nie tylko wartość pracy, ale również czas, w jakim została ona wykonana. W tym celu wprowadzono pojęcie mocy.

Mocą chwilową nazywamy stosunek pracy elementarnej dL do czasu dt.

$$N = \frac{dL}{dt}. \qquad (7.34)$$

Po podstawieniu do tego wzoru pracy elementarnej zdefiniowanej wzorem (7.15) otrzymujemy wzór na moc siły **P**.

$$N = \frac{\mathbf{P} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}. \qquad (7.35)$$

Zatem *moc siły jest równa iloczynowi skalarnemu siły* **P** *i prędkości* **v** *jej punktu przyłożenia.*

Ze wzoru (7.34) widzimy, że między pracą elementarną dL i mocą N istnieje prosty związek:

$$dL = Ndt.$$

Jeżeli siła P w chwili t_1 znajduje się w punkcie A_1, a w chwili t_2 w punkcie A_2 (rys. 7.6), to praca L_{12} wykonana przez tę siłę przy przemieszczeniu się po torze od A_1 do A_2 będzie równa całce z mocy w granicach od t_1 do t_2:

$$L_{12} = \int_{t_1}^{t_2} Ndt. \qquad (7.36)$$

Gdy na układ materialny działa układ n sił, to moc tego układu jest równa sumie mocy poszczególnych sił:

$$N = \sum_{k=1}^{n} N_k. \qquad (7.37)$$

Podstawową jednostką mocy w układzie SI jest wat (w skrócie W). Jest to moc siły, która pracę jednego dżula wykonuje w ciągu jednej sekundy:

$$1\ W = J \cdot s^{-1}.$$

W praktyce na określenie mocy silników i maszyn są używane większe jednostki – kilowaty (kW) i megawaty (MW):·

$$1\ kW = 1000\ W,$$

$$1\ \mathrm{MW} = 1000\ \mathrm{kW} = 1\ 000\ 000\ \mathrm{W}.$$

W technicznym układzie jednostek podstawową jednostką mocy jest kilogram siły razy metr na sekundę:

$$1\ \mathrm{kG} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}.$$

Praktyczną jednostką mocy w tym układzie jest koń mechaniczny KM:

$$1\ \mathrm{KM} = 75\ \mathrm{kG} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}.$$

Między jednostkami mocy w układzie technicznym i w układzie SI istnieją zależności:

$$1\ \mathrm{kG} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} = 9{,}81\ \mathrm{W},$$
$$1\ \mathrm{KM} = 75 \cdot 9{,}81\ \mathrm{W} = 0{,}736\ \mathrm{kW},$$
$$1\ \mathrm{W} = 0{,}102\ \mathrm{kG} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1},$$
$$1\ \mathrm{kW} = 102\ \mathrm{kG} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} = 1{,}36\ \mathrm{KM}.$$

Do oceny stanu silnika czy maszyny wykorzystuje się *pojęcie sprawności mechanicznej*. Wiadomo, że część mocy dostarczonej do silnika (maszyny) jest tracona na pokonanie oporów istniejących w samym silniku (maszynie), a tylko część jest zamieniana na moc użyteczną.

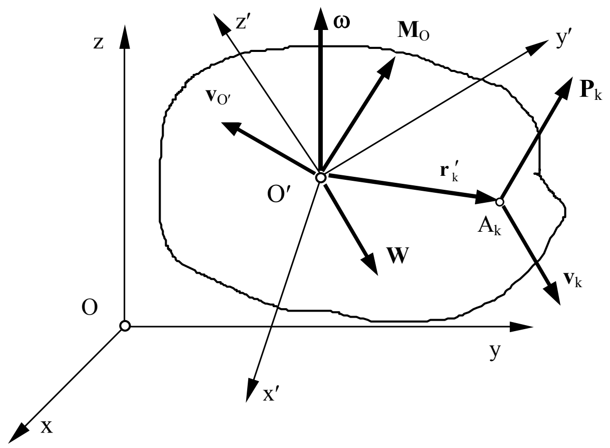
Sprawnością mechaniczną nazywamy stosunek mocy użytecznej N_u (lub pracy L_u) do mocy włożonej N_w (lub pracy L_w):

$$\eta = \frac{N_u}{N_w} = \frac{L_u}{L_w}\ . \tag{7.38}$$

Sprawność jest liczbą bezwymiarową spełniającą nierówność: $0 \leq \eta \leq 1$.

7.1.8. Moc układu sił działających na bryłę sztywną

W poprzednim punkcie zdefiniowaliśmy moc siły **P** działającej na punkt materialny. Obecnie obliczymy moc układu n sił zewnętrznych $\mathbf{P}_k$, gdzie $k = 1, 2, \ldots, n$, przyłożonych odpowiednio w punktach $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bryły sztywnej, poruszającej się znanym ruchem względem nieruchomego układu współrzędnych x, y, z (rys. 7.11). W dowolnym punkcie (biegunie redukcji) O' umieścimy ruchomy układ współrzędnych x', y', z' poruszający się razem z bryłą. Układ sił $\mathbf{P}_k$ reprezentują wektor główny **W** i moment główny $\mathbf{M}_{O'}$ umieszczone w biegunie redukcji O', a ruch bryły jest określony za pomocą prędkości $\mathbf{v}_{O'}$ bieguna O' i prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$.



Rys. 7.11. Wyznaczenie mocy układu sił działających na bryłę sztywną

Zgodnie z definicją moc N_k siły $\mathbf{P}_k$

$$N_k = \mathbf{P}_k \cdot \mathbf{v}_k\,.$$

Prędkość dowolnego punktu A_k zgodnie ze wzorem (5.29) możemy zapisać w następujący sposób:

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_k\,.$$

Po podstawieniu tego wzoru do wzoru na moc N_k siły $\mathbf{P}_k$ oraz wykorzystaniu własności iloczynu mieszanego (2.31) otrzymujemy:

$$N_k = \mathbf{P}_k \cdot \left(\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_k\right) = \mathbf{P}_k \cdot \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{P}_k \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'\right) = \mathbf{P}_k \cdot \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \cdot \left(\mathbf{r}'_k \times \mathbf{P}_k\right).$$

Moc układu sił działających na bryłę sztywną otrzymamy po zsumowaniu – zgodnie ze wzorem (7.37) – mocy poszczególnych sił:

$$N = \sum_{k=1}^{n} N_k = \sum_{k=1}^{n} \left[\mathbf{P}_k \cdot \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \cdot \left(\mathbf{r}'_k \times \mathbf{P}_k \right) \right] = \mathbf{v}_{O'} \cdot \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_k + \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}'_k \times \mathbf{P}_k \,.$$

Ostatecznie

$$N = \mathbf{W} \cdot \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{M}_{O'} \cdot \boldsymbol{\omega} \,. \tag{7.39}$$

Zgodnie z zależnościami (3.25) i (3.26) w powyższym wzorze **W** jest wektorem głównym, a $\mathbf{M}_{O'}$ momentem głównym układu sił zewnętrznych zredukowanych do bieguna redukcji O'.

Wzór (7.39) można wyrazić słownie:

Moc układu sił zewnętrznych działających na bryłę sztywną jest równa sumie iloczynu skalarnego wektora głównego i prędkości dowolnego bieguna redukcji oraz iloczynu skalarnego momentu głównego zredukowanego do tegoż bieguna i prędkości kątowej.