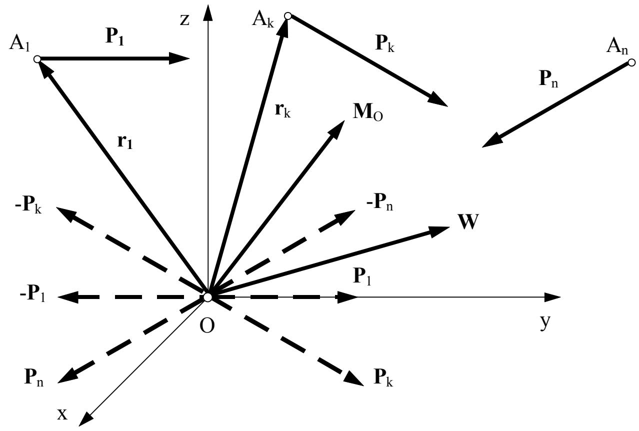
3.7.1. Redukcja dowolnego układu sił do siły i pary sił

Dowolnym układem sił będziemy nazywać układ sił o liniach działania dowolnie rozmieszczonych w przestrzeni. W tym punkcie zajmiemy się sprowadzeniem (redukcją) takiego układu sił do najprostszej postaci, czyli do najprostszego układu sił równoważnego danemu układowi sił.

Załóżmy, że mamy dowolny układ n sił $\mathbf{P}_k$ o punktach przyłożenia A_k (k = 1, 2 , . . . , n), jak na rys. 3.21. W celu redukcji tego układu przyjmijmy dowolny punkt O nazywany *biegunem redukcji*. Położenie sił $\mathbf{P}_k$ w stosunku do bieguna redukcji niech określają wektory $\mathbf{r}_k$.
W biegunie redukcji przyłóżmy n sił $\mathbf{P}_k$ oraz n sił o przeciwnych zwrotach: $\mathbf{P}_k' = -\mathbf{P}_k$. Takie postępowanie nie wpłynie na zmianę skutków mechanicznych, ponieważ układ 2n sił przyłożonych w punkcie O jest równoważny zeru. W konsekwencji otrzymaliśmy n sił $\mathbf{P}_k$ zbieżnych w biegunie redukcji O oraz n par sił $\mathbf{P}_k$ i $\mathbf{P}_k'$ przyłożonych odpowiednio w punktach A_k i O o momentach równych momentowi siły $\mathbf{P}_k$ względem bieguna O, czyli

$$\mathbf{M}_O\left(\mathbf{P}_k\right) = \mathbf{r}_k \times \mathbf{P}_k .$$



Rys. 3.21. Redukcja dowolnego przestrzennego układu sił

Wiadomo, że układ n sił zbieżnych w biegunie redukcji O można zastąpić jedną siłą **W,** równą ich sumie geometrycznej (wzór 3.10), również przechodzącą przez punkt zbieżności. Podobnie układ n par sił możemy zastąpić jedną parą równoważną o momencie równym sumie geometrycznej momentów par składowych (wzór 3.22). Możemy zatem zapisać:

$$\left.\begin{aligned} W &= \sum_{k=1}^{n} P_k, \\ M_O &= \sum_{k=1}^{n} M_O(P_k) = \sum_{k=1}^{n} r_k \times P_k, \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

Siłę **W** nazywamy *wektorem głównym*, a moment $\mathbf{M}_O$ *momentem głównym*. Definicje wektora głównego i momentu głównego możemy ująć słownie:

Wektorem głównym układu sił nazywamy sumę geometryczną wszystkich sił przyłożoną w dowolnie obranym biegunie redukcji O:

$$\mathbf{W} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_k. \tag{3.25}$$

Momentem głównym układu sił względem bieguna redukcji O *nazywamy sumę geometryczną momentów wszystkich sił względem tego bieguna:*

$$\mathbf{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{P}_k. \tag{3.26}$$

Na podstawie powyższych rozważań możemy stwierdzić, co następuje:

Dowolny układ sił działających na ciało sztywne można zastąpić układem równoważnym składającym się z jednej siły **W** *przyłożonej w dowolnie obranym biegunie redukcji* O *oraz pary sił o momencie* $\mathbf{M}_O$.

W celu obliczenia współrzędnych wektora głównego **W** i momentu głównego $\mathbf{M}_O$ przyjmiemy w biegunie redukcji O prostokątny układ współrzędnych x, y, z (rys. 3.21). Ponadto założymy, że w tym układzie są znane współrzędne P_{kx}, P_{ky} i P_{kz} sił $\mathbf{P}_k$ oraz współrzędne x_k, y_k i z_k wektorów $\mathbf{r}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ określających punkty przyłożenia tych sił.

Po oznaczeniu współrzędnych wektora głównego przez W_x, W_y i W_z na podstawie twierdzenia o rzucie sumy współrzędne te będą równe sumie rzutów wszystkich sił na poszczególne osie układu współ rzędnych:

$$W_x = \sum_{k=1}^{n} P_{kx}, \quad W_y = \sum_{k=1}^{n} P_{ky}, \quad W_z = \sum_{k=1}^{n} P_{kz}. \tag{3.27}$$

Po oznaczeniu współrzędnych momentu głównego przez M_{Ox}, M_{Oy} i M_{Oz} i uwzględnieniu wzorów (2.41) współrzędne te będą równe sumie momentów wszystkich sił względem odpowiednich osi układu współrzędnych:

$$\left.\begin{aligned}
M_{Ox} &= \sum_{k=1}^{n} M_{kx} = \sum_{k=1}^{n} \left(y_k P_{kz} - z_k P_{ky}\right),\\
M_{Oy} &= \sum_{k=1}^{n} M_{ky} = \sum_{k=1}^{n} \left(z_k P_{kx} - x_k P_{kz}\right),\\
M_{Oz} &= \sum_{k=1}^{n} M_{kz} = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k P_{ky} - y_k P_{kx}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$

Otrzymane skalarne wzory (3.27) i (3.28) są równoważne wektorowym wzorom (3.25) i (3.26).

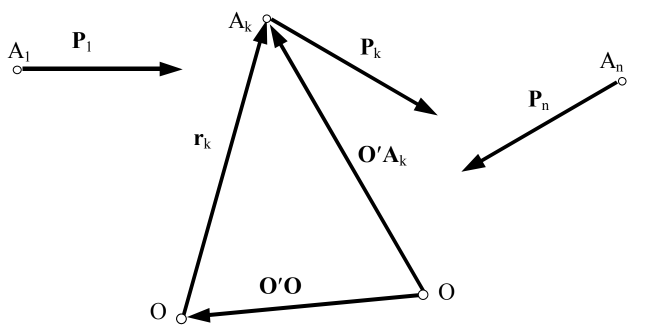
Aby dwa dowolne układy sił były wzajemnie równoważne, warunkiem koniecznym i wystarczającym jest, aby ich wektory główne i momenty główne względem tego samego bieguna redukcji były równe.

3.7.2. Twierdzenie o momencie głównym

Ze wzoru (3.25) wynika, że wektor główny nie zależy od wyboru bieguna redukcji O, czyli wektor główny jest niezmiennikiem układu sił w operacji zmiany bieguna redukcji. Moment główny wraz ze zmianą bieguna redukcji ulegnie zmianie zgodnie z następującym twierdzeniem, znanym jako *twierdzenie o momencie głównym:*

Moment główny dowolnego układu sił względem dowolnego bieguna O• *jest równy momentowi głównemu względem innego dowolnego bieguna* O *powiększonemu o moment wektora głównego przyłożonego w biegunie* O *względem bieguna* O′.

W celu udowodnienia tego twierdzenia przyjmijmy, że dany jest dowolny układ n sił $\mathbf{P}_k$ przyłożonych w punktach A_k (k = 1, 2, . . . , n), którego moment główny względem bieguna redukcji O jest dany wzorem (3.26). Zastanówmy się, jak zmieni się moment główny, jeżeli biegun redukcji przeniesiemy do punktu O′ (rys. 3.22).



Rys. 3.22. Ilustracja do twierdzenia o momencie głównym

Zgodnie z definicją moment główny względem nowego bieguna redukcji O′ wyraża wzór:

$$\mathbf{M}_{O'} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{O'A}_k \times \mathbf{P}_k .$$

Po podstawieniu do tego wzoru zależności wynikającej z rys. 3.22:

$$\mathbf{O'A}_k = \mathbf{O'O} + \mathbf{r}_k$$

otrzymamy:

$$\mathbf{M}_{O'} = \sum_{k=1}^{n} \left(\mathbf{O'O} + \mathbf{r}_k\right) \times \mathbf{P}_k = \mathbf{O'O} \times \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_k + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{P}_k .$$

Po uwzględnieniu, że pierwsza suma po prawej stronie tego równania jest wektorem głównym **W** (wzór 3.35), a druga momentem głównym $\mathbf{M}_O$ względem bieguna O (wzór 3.36), otrzymujemy dowód twierdzenia o momencie głównym:

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + \mathbf{O'O} \times \mathbf{W}. \tag{3.29}$$

3.7.3. Warunki równowagi dowolnego układu sił

W punkcie 3.7.1 udowodniono, że dowolny przestrzenny układ sił działających na ciało sztywne można sprowadzić do układu prostszego, składającego się z wektora głównego **W** przyłożonego w biegunie redukcji O i pary sił o momencie $\mathbf{M}_O$, zwanym momentem głównym, względem tego bieguna. Wielkości te, zgodnie ze wzorami (3.24), można ująć w następujący sposób:

$$\mathbf{W} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_k, \quad \mathbf{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{P}_k. \tag{3.30}$$

Z powyższych zależności wynika, że układ sił będzie równoważny zeru, gdy zarówno wektor główny, jak i moment główny będą równe zeru:

$$\mathbf{W} = 0 \quad \text{oraz} \quad \mathbf{M}_O = 0. \tag{3.31}$$

Z porównania wzorów (3.30) i (3.31) wynikają dwa następujące wektorowe warunki równowagi:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{P}_k = 0. \tag{3.32}$$

Warunki te można wyrazić słownie:

Aby dowolny układ sił był w równowadze, warunkiem koniecznym i wystarczającym jest, by suma sił i suma ich momentów względem dowolnego punktu były równe zeru.

Wiadomo, że dowolne wektory będą równe zeru, jeżeli ich współrzędne w przyjętym układzie współrzędnych będą równe zeru. Zatem, aby wektory (3.30) były równe zeru, ich współrzędne wyrażone wzorami (3.27) i (3.28) muszą być równe zeru. Stąd otrzymujemy sześć równań równowagi:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} P_{kz} = 0, \\ &\sum_{k=1}^{n} M_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{kz} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.33}$$

Aby dowolny układ sił był w równowadze, sumy rzutów wszystkich sił na trzy osie układu współrzędnych oraz sumy momentów wszystkich sił względem tych osi muszą być równe zeru.

Z otrzymanych równań równowagi (3.33) wynika, że w zagadnieniach dotyczących równowagi ciała sztywnego poddanego działaniu dowolnego układu sił możemy wyznaczyć sześć niewiadomych. W przypadku większej liczby niewiadomych mamy do czynienia z zagadnieniem statycznie niewyznaczalnym, którego nie można rozwiązać na gruncie statyki ciała sztywnego.

Równania równowagi (3.33) dotyczą dowolnego przestrzennego układu sił i jako takie zawierają w sobie warunki równowagi prostszych układów sił. Przykładowo dla przestrzennego zbieżnego układu sił omówionego w p. 3.4 moment główny względem punktu zbieżności będzie równy zeru, czyli równania momentów będą tożsamościowo spełnione, a zatem otrzymamy tylko trzy równania równowagi w postaci (3.16) i (3.17).

3.7.4. Redukcja dowolnego układu sił do skrętnika

Wiadomo z p. 3.7.1, że dowolny układ sił można zastąpić układem równoważnym składającym się z wektora głównego **W** przyłożonego w dowolnym biegunie O oraz pary sił o momencie $\mathbf{M}_O$. W punkcie 3.7.2 powiedziano, że wektor główny po zmianie bieguna redukcji na inny (np. O′) nie ulegnie zmianie, natomiast moment główny zmieni się zgodnie z twierdzeniem o momencie głównym wg wzoru (3.29).

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + \mathbf{O'O} \times \mathbf{W}. \tag{a}$$

Pomnóżmy skalarnie obie strony powyższego równania przez wektor główny **W**:

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{M}_{O'} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{M}_O + \mathbf{W} \cdot \left(\mathbf{O'O} \times \mathbf{W}\right). \tag{b}$$

Iloczyn mieszany występujący po prawej stronie tego równania jest równy zeru, ponieważ zgodnie z zależnością (2.31) możemy napisać:

$$\mathbf{W} \cdot \left(\mathbf{O'O} \times \mathbf{W}\right) = \mathbf{O'O} \cdot \left(\mathbf{W} \times \mathbf{W}\right) = 0.$$

Równanie (b) przybierze zatem postać:

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{M}_{O'} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{M}_O = \mathrm{p} = \mathrm{const}. \tag{3.34}$$

Widzimy, że iloczyn skalarny wektora głównego i momentu głównego jest wielkością stałą, niezależną od wyboru bieguna redukcji. Wielkość p występującą w równaniu (3.34) nazywamy *parametrem układu sił*.

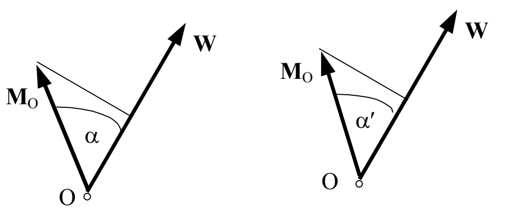
Jeżeli kąty między wektorami **W** i $\mathbf{M}_O$ oraz między **W** i $\mathbf{M}_{O\bullet}$ oznaczymy odpowiednio przez α i α′, jak na rys. 3.23, to równanie (3.34) możemy zapisać w poniższej postaci:

$$WM_{O'}\cos\alpha' = WM_O\cos\alpha = \mathrm{const}$$

albo

$$M_{O'}\cos\alpha' = M_O\cos\alpha = \mathrm{const}\,. \tag{3.35}$$

Iloczyny $M_{O'}\cos\alpha'$ i $M_O\cos\alpha$ są rzutami momentów głównych $\mathbf{M}_{O'}$ i $\mathbf{M}_O$ na kierunek wektora głównego. Zatem z równania (3.35) wynika, że rzut momentu głównego na kierunek wektora głównego również nie zależy od wyboru bieguna



Rys. 3.23. Rzut momentu głównego na kierunek wektora głównego

redukcji i jest wielkością stałą, czyli jest obok wektora głównego drugim *niezmiennikiem układu* sił.

Wykażemy teraz, że można znaleźć taki biegun redukcji S, że moment $\mathbf{M}_S$ będzie równoległy do wektora głównego **W** (rys. 3.24). Taki układ sił będziemy nazywać *skrętnikiem*.

Skrętnikiem nazywamy układ składający się z siły **W** *i pary sił o momencie* $\mathbf{M}_S$ *równoległym do siły* **W**.

Dla wyznaczenia momentu $\mathbf{M}_S$ (momentu skrętnika) oraz położenia punktu S, czyli wektora **OS,** przyjmiemy, że dany jest wektor główny **W** i moment główny $\mathbf{M}_O$ względem dowolnego bieguna O (rys. 3.24).

Na podstawie równania (3.34) i rys. 3.24 możemy napisać:

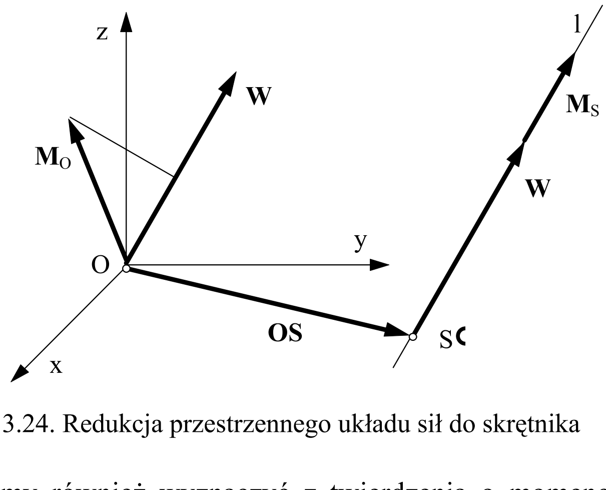
$$\mathbf{W}\cdot\mathbf{M}_O = \mathbf{W}\cdot\mathbf{M}_S = \mathrm{W}\,\mathrm{M}_S\,,$$

stąd moduł momentu

$$\mathrm{M}_S = \frac{\mathbf{W}\cdot\mathbf{M}_O}{\mathrm{W}}. \tag{3.36}$$

Po pomnożeniu tego wzoru przez wektor jednostkowy o kierunku wektora głównego **W** otrzymamy wzór na moment $\mathbf{M}_S$:

$$\mathbf{M}_S = \frac{\left(\mathbf{W}\cdot\mathbf{M}_O\right)\mathbf{W}}{\mathrm{W}^2}. \tag{3.37}$$



Rys. 3.24. Redukcja przestrzennego układu sił do skrętnika

Moment $\mathbf{M}_S$ możemy również wyznaczyć z twierdzenia o momencie głównym przez podstawienie we wzorze (3.29) **S** zamiast **O′**:

$$\mathbf{M}_S = \mathbf{M}_O + \mathbf{SO} \times \mathbf{W} . \tag{3.38}$$

W celu wyznaczenia wektora **OS**, czyli położenia punktu S, porównamy stronami wzory (3.37) i (3.38):

$$\mathbf{M}_O + \mathbf{SO} \times \mathbf{W} = \frac{\left(\mathbf{W} \cdot \mathbf{M}_O\right)\mathbf{W}}{W^2} .$$

Po przeniesieniu momentu $\mathbf{M}_O$ na prawą stronę i sprowadzeniu do wspólnego mianownika możemy napisać:

$$\mathbf{SO} \times \mathbf{W} = \frac{\mathbf{W}\left(\mathbf{W} \cdot \mathbf{M}_O\right) - \mathbf{M}_O\left(\mathbf{W} \cdot \mathbf{W}\right)}{W^2} .$$

Licznik po prawej stronie jest rozwinięciem podwojonego iloczynu wektorowego (2.34). Po odpowiednim przestawieniu wyrazów po lewej stronie mamy ostatecznie:

$$\mathbf{W} \times \mathbf{OS} = \frac{\mathbf{W} \times \left(\mathbf{W} \times \mathbf{M}_O\right)}{W^2} . \tag{3.39}$$

Łatwo sprawdzić, że ogólne rozwiązanie tego równania wektorowego ma postać:

$$\mathbf{OS} = \frac{\left(\mathbf{W} \times \mathbf{M}_O\right)}{W^2} + \lambda \mathbf{W} , \tag{3.40}$$

gdzie λ jest dowolną wielkością skalarną tak dobraną, aby iloczyn $\lambda\mathbf{W}$ miał wymiar długości.

Otrzymane równanie (3.40) jest wektorowym równaniem prostej l przechodzącej przez punkt S i równoległej do wektora głównego **W**. Prostą tę nazywamy *osią centralną* układu sił lub *osią skrętnika*.

Po wprowadzeniu w punkcie O (rys. 3.24) układu współrzędnych x, y, z i oznaczeniu współrzędnych punktu S w tym układzie przez x_S, y_S i z_S wektorowe równanie osi centralnej (3.40) możemy przedstawić w postaci trzech parametrycznych równań skalarnych:

$$\left.\begin{aligned} x_S &= \frac{W_y M_{Oz} - W_z M_{Oy}}{W^2} + \lambda W_x, \\ y_S &= \frac{W_z M_{Ox} - W_x M_{Oz}}{W^2} + \lambda W_y, \\ z_S &= \frac{W_x M_{Oy} - W_y M_{Ox}}{W^2} + \lambda W_z. \end{aligned}\right\} \tag{3.41}$$

Obecnie rozpatrzymy szczególne przypadki układów sił sprowadzonych do skrętnika.

a) Gdy wektor główny $\mathbf{W} = 0$ i moment $\mathbf{M}_S = 0$, to ze wzoru (3.38) wynika, że moment główny jest także równy zeru, $\mathbf{M}_O = 0$, czyli układ sił jest równoważny zeru (wzory 3.31).

b) Jeżeli wektor $\mathbf{W} = 0$, a moment $\mathbf{M}_S \neq 0$, to ze wzoru (3.38) otrzymujemy $\mathbf{M}_S = \mathbf{M}_O$, czyli najprostszym układem, do jakiego można sprowadzić dany układ, jest para sił.

c) Jeżeli $\mathbf{W} \neq 0$, a $\mathbf{M}_S = 0$, to układ można sprowadzić do jednej siły $\mathbf{W}$ działającej wzdłuż osi centralnej, czyli do wypadkowej. W tym przypadku ze wzoru (3.37) wynika bezpośrednio, że iloczyn skalarny wektora głównego $\mathbf{W}$ i momentu głównego $\mathbf{M}_O$ jest równy zeru. Oznacza to, że moment główny jest prostopadły do wektora głównego. Zatem analityczny warunek istnienia wypadkowej ma postać:

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{M}_O = 0. \tag{3.42}$$

d) Jeżeli $\mathbf{W} \neq 0$ i $\mathbf{M}_S \neq 0$, to skrętnik jest najprostszym układem, do jakiego można zredukować dany układ sił.