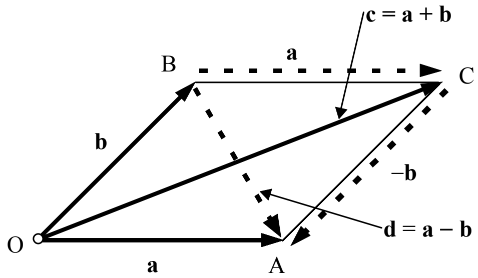
2.2. Suma i różnica wektorów

Wektory swobodne można dodawać i odejmować geometrycznie (wykreślnie) oraz analitycznie. Dodawanie geometryczne dwóch wektorów **a** i **b** polega na



Rys. 2.6. Dodawanie i odejmowanie dwóch wektorów

zastosowaniu reguły równoległoboku. Wektory przenosimy równolegle tak, aby ich początki znalazły się w dowolnym punkcie O, i budujemy na tych wektorach równoległobok OACB pokazany na rys. 2.6. Sumą dodawanych wektorów **a** i **b** nazywamy wektor **c** równy przekątnej równoległoboku:

$$\mathbf{c} = \mathbf{OC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Różnicę dwóch wektorów **a** – **b** otrzymamy przez dodanie do wektora **a** wektora różniącego się od wektora **b** tylko zwrotem, czyli wektor przeciwny (– **b**):

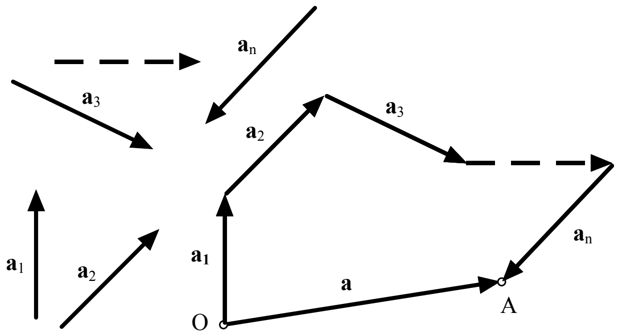
$$\mathbf{d} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} - \mathbf{b}.$$

Odejmowanie dwóch wektorów przedstawiono na rys. 2.6 linią przerywaną. Z rysunku wynika, że sumę dwóch wektorów przedstawia jedna przekątna, a różnicę druga.

Większą liczbę wektorów można sumować, stosując regułę równoległoboku do kolejnych wektorów. Jednak w tym przypadku wygodniej jest skorzystać z metody wieloboku wektorów.

Gdy mamy n wektorów $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, . . . , $\mathbf{a}_n$, to do końca pierwszego wektora przykładamy początek drugiego, a do końca drugiego początek trzeciego. Postępując w ten sposób z kolejnymi wektorami, otrzymujemy konstrukcję przedstawioną na rys. 2.7. Sumą n wektorów, zwaną sumą geometryczną, nazywamy wektor **a** łączący początek pierwszego wektora z końcem ostatniego:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}_k . \qquad (2.9)$$



Rys. 2.7. Dodawanie n wektorów

Omówioną konstrukcję nazywamy wielobokiem wektorów. Jeżeli koniec ostatniego wektora pokrywa się z początkiem pierwszego, to suma wektorów jest równa zeru: $\mathbf{a} = 0$. Mówimy wtedy, że wielobok jest zamknięty. W przeciwnym razie, tj. gdy $\mathbf{a} \neq 0$, wielobok jest otwarty.

Czytelnikowi pozostawiamy wykazanie, że do dodawania wektorów stosuje się prawo przemienności:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

oraz łączności

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Aby analitycznie dodać n wektorów, musimy je wyrazić za pomocą współrzędnych z przyjętego układu współrzędnych:

$$\mathbf{a}_k = a_{kx}\mathbf{i} + a_{ky}\mathbf{j} + a_{kz}\mathbf{k} \qquad (k = 1, 2, \ldots n).$$

Po podstawieniu tego wzoru do równania (2.9) otrzymamy:

$$\mathbf{a} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}_k = \sum_{k=1}^{n}\left(a_{kx}\,\mathbf{i} + a_{ky}\,\mathbf{j} + a_{kz}\,\mathbf{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{kx}\,\mathbf{i} + \sum_{k=1}^{n} a_{ky}\,\mathbf{j} + \sum_{k=1}^{n} a_{kz}\,\mathbf{k}.$$

Po oznaczeniu w tym równaniu współrzędnych wektora **a** przez a_x, a_y, a_z mamy:

$$a_x\,\mathbf{i}+a_y\,\mathbf{j}+a_z\,\mathbf{k}=\sum_{k=1}^{n}a_{kx}\,\mathbf{i}+\sum_{k=1}^{n}a_{ky}\,\mathbf{j}+\sum_{k=1}^{n}a_{kz}\,\mathbf{k}.$$

Z obustronnego porównania wyrazów występujących przy odpowiednich wersorach otrzymujemy wzory na współrzędne wektora będącego sumą wektorów:

$$a_x=\sum_{k=1}^{n}a_{kx},\; a_y=\sum_{k=1}^{n}a_{ky},\; a_z=\sum_{k=1}^{n}a_{kz}. \tag{2.10}$$

Otrzymane wyniki są zgodne z treścią znanego twierdzenia Charles'a, że rzut sumy wektorów na dowolną oś jest równy sumie rzutów poszczególnych wektorów na tę oś.