4.2.1. Środek ciężkości bryły jednorodnej

Bryłą jednorodną nazywamy ciało materialne, w którym masa jest rozmieszczona równomiernie w całej jego objętości. Dla takich ciał zarówno gęstość, jak i ciężar właściwy są wielkościami stałymi. Jeżeli ciężar właściwy oznaczymy przez γ, a objętość bryły przez V, to całkowity ciężar oraz ciężar elementu objętości bryły możemy wyrazić wzorami:

$$G = \gamma\, V, \quad dG = \gamma\, dV .$$

Po podstawieniu tych zależności do wzorów (4.5) oraz (4.6) i skróceniu przez stały czynnik γ otrzymamy:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\int_V \mathbf{r}\, dV}{V}, \tag{4.11}$$

$$x_C = \frac{\int_V x dV}{V}, \quad y_C = \frac{\int_V y dV}{V}, \quad z_C = \frac{\int_V z dV}{V}. \tag{4.12}$$

Obszarem całkowania jest tutaj cała objętość bryły V.

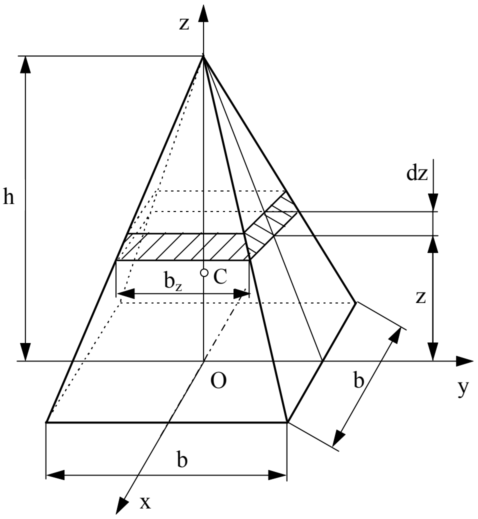
Z otrzymanych wzorów wynika, że położenie środka ciężkości (środka masy) brył jednorodnych zależy tylko od ich kształtu geometrycznego.

W wyznaczaniu środków ciężkości pomocne jest następujące twierdzenie, którego dowód pozostawiamy Czytelnikowi.

Jeżeli bryła jednorodna ma płaszczyznę, oś lub środek symetrii, to środek ciężkości tej bryły będzie leżał na płaszczyźnie, osi lub w środku symetrii.

Przykład 4.1. Wyznaczyć położenie środka ciężkości jednorodnego ostrosłupa foremnego o podstawie kwadratu o boku b i wysokości h (rys. 4.3).

Rozwiązanie. Ponieważ oś z jest osią symetrii, środek ciężkości będzie leżał na tej osi, czyli $x_C = y_C = 0$. Wystarczy zatem wyznaczyć jedną współrzędną z_C z trzeciego wzoru (4.12).



Rys. 4.3. Wyznaczanie środka ciężkości ostrosłupa

$$z_C = \frac{\int\limits_V z dV}{V}. \tag{a}$$

W mianowniku tego wzoru występuje objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{b^2 h}{3}. \tag{b}$$

W celu wyznaczenia całki występującej w liczniku wzoru (a) ostrosłup podzielimy na elementy dV w postaci cienkich płytek kwadratowych, równoległych do podstawy xy, o boku b_z i grubości dz. Objętość tak przyjętego elementu

$$dV = b_z^2 dz.$$

Bok krawędzi elementu znajdziemy z proporcji wynikającej z rysunku:

$$\frac{b_z}{b} = \frac{h - z}{h}, \quad \text{stąd} \quad b_z = \frac{b}{h}(h - z).$$

Mamy więc:

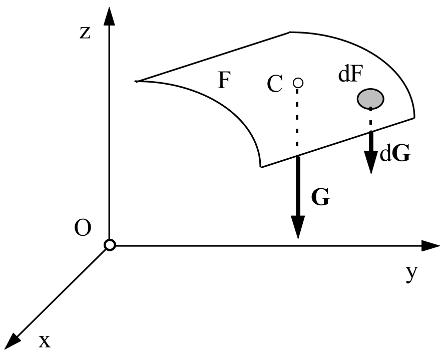
$$dV = \frac{b^2}{h^2}(h - z)^2 \, dz \, . \tag{c}$$

Po podstawieniu wzorów (c) i (b) do (a) i wykonaniu całkowania otrzymamy szukaną współrzędną środka ciężkości:

$$z_C = \frac{\dfrac{b^2}{h^2}\displaystyle\int_0^h (h - z)^2 \, z \, dz}{\dfrac{b^2 h}{3}} = \frac{h}{4} \, .$$

4.2.2. Środek ciężkości powierzchni jednorodnej

Takie bryły, jak cienkie płyty, blachy, powłoki itp., których grubość jest znikomo mała w porównaniu z pozostałymi wymiarami, będziemy nazywali powierzchniami materialnymi. Jeżeli ciężar jednostki powierzchni jest stały, to powierzchnię taką nazywamy *powierzchnią jednorodną*. Gdy ciężar jednostki powierzchni oznaczymy przez γ_F, powierzchnię całkowitą przez F, a powierzchnię elementarną przez dF (rys. 4.4), to możemy napisać:



Rys. 4.4. Wyznaczanie położenia środka ciężkości powierzchni

$$G = \gamma_F F, \quad dG = \gamma_F dF.$$

Po podstawieniu tych zależności do wzorów (4.6) i po skróceniu licznika i mianownika przez $\gamma_F = \text{const}$ otrzymamy wzory na współrzędne środka ciężkości powierzchni jednorodnej:

$$x_C = \frac{\int_F x dF}{F}, \quad y_C = \frac{\int_F y dF}{F}, \quad z_C = \frac{\int_F z dF}{F}. \tag{4.13}$$

Występujące w tych wzorach całki są całkami powierzchniowymi rozciągniętymi na całą powierzchnię F.

Jeżeli powierzchnia jednorodna jest figurą płaską i leży na płaszczyźnie np. xy, to współrzędna $z_C = 0$ oraz

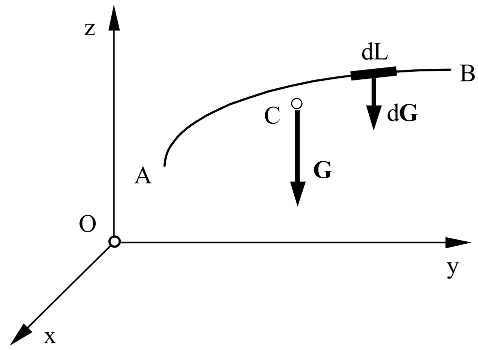
$$x_C = \frac{\int_F x dF}{F}, \quad y_C = \frac{\int_F y dF}{F}. \tag{4.14}$$

Punkt C o współrzędnych określonych wzorami (4.14) nazywamy *środkiem ciężkości figury płaskiej*.

4.2.3. Środek ciężkości linii jednorodnej

W zastosowaniach technicznych często spotykamy bryły, takie jak druty, pręty, liny itp., których dwa wymiary są znikomo małe w porównaniu z długością. Bryły te nazywamy liniami materialnymi, tzn. przyjmujemy, że cała masa jest rozłożona wzdłuż linii środków przekrojów poprzecznych. Jeżeli ciężar jednostki długości jest stały, to taką linię nazywamy *linią jednorodną*.

Po oznaczeniu ciężaru jednostki długości przez γ_L, a długości linii AB (rys. 4.5) przez L ciężar całkowity linii i ciężar elementu długości będą wyrażały wzory:



Rys. 4.5. Wyznaczanie położenia środka ciężkości linii jednorodnej

$$G = \gamma_L L, \quad dG = \gamma_L dL .$$

Postępując analogicznie jak w przypadku powierzchni jednorodnej ze wzorów (4.6), otrzymamy wzory na współrzędne środka ciężkości C linii jednorodnej:

$$x_C = \frac{\int_L x dL}{L}, \quad y_C = \frac{\int_L y dL}{L}, \quad z_C = \frac{\int_L z dL}{L}, \tag{4.15}$$

gdzie L jest długością linii.