4.1. Środek ciężkości i środek masy

Rozpatrzmy układ n punktów materialnych o masach m_k (k = 1, 2, . . . , n), na które działają siły ciężkości $\mathbf{G}_k$ (rys. 4.1). Niech położenie tych punktów względem punktu odniesienia O określają wektory wodzące $\mathbf{r}_k$, jak na rysunku. Wiadomo, że siły ciężkości poszczególnych punktów są równe iloczynowi masy przez przyśpieszenie ziemskie, $\mathbf{G}_k = m_k\,\mathbf{g}$, i są skierowane do środka kuli ziemskiej. Ponieważ wymiary układów materialnych rozpatrywanych w zastosowaniach technicznych są pomijalnie małe w porównaniu z promieniem kuli ziemskiej, siły ciężkości możemy uważać za siły równoległe. Punkt C położenia wypadkowej sił ciężkości **G** nazywamy *środkiem ciężkości* układu lub ciała materialnego. Punkt ten nie zależy od obrotu układu lub ciała materialnego.

Skoro siły ciężkości są siłami równoległymi, to do określenia położenia środka ciężkości C możemy wykorzystać wzory wyprowadzone w p. 3.9.1 na środek układu sił równoległych. Wektor wodzący $\mathbf{r}_C$ środka ciężkości C układu punktów materialnych zgodnie ze wzorem (3.54) będzie wyrażał związek:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k\, G_k}{G}. \tag{4.1}$$

Współrzędne środka ciężkości C w prostokątnym układzie współrzędnych otrzymamy ze wzorów (3.55):

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k G_k}{G}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k G_k}{G}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k G_k}{G}. \tag{4.2}$$

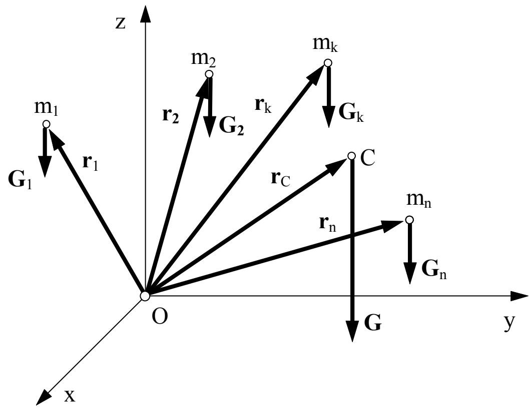
We wzorach (4.1) i (4.2) G jest ciężarem całkowitym układu materialnego:

$$G = \sum_{k=1}^{n} G_k .$$

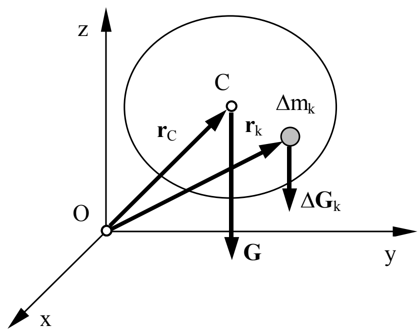
W przypadku ciała materialnego o ciągłym rozmieszczeniu masy, jakim jest bryła, dzielimy je myślowo na n małych elementów o masach Δm_k i ciężarach ΔG_k (rys. 4.2). Po podstawieniu do wzorów (4.1) i (4.2) ΔG_k zamiast G_k otrzymamy wzory na przybliżone położenie środka ciężkości bryły:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k\, \Delta G_k}{G}, \tag{4.3}$$

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \Delta G_k}{G}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k \Delta G_k}{G}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k \Delta G_k}{G}. \tag{4.4}$$



Rys. 4.1. Siły ciężkości jako siły równoległe



Rys. 4.2. Wyznaczanie środka ciężkości dowolnej bryły

Dokładny wzór na promień wodzący $\mathbf{r}_C$ środka ciężkości C otrzymamy, biorąc granicę sumy występującej we wzorze (4.3) przy liczbie elementów n dążącej do nieskończoności i ich wymiarach dążących do zera. Wtedy w miejsce sumy otrzymamy całkę rozciągniętą na całą bryłę. Zatem wektor wodzący środka ciężkości C

$$\mathbf{r}_C = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \, \Delta G_k}{G} = \frac{\int_G \mathbf{r}\, dG}{G}. \tag{4.5}$$

Z kolei współrzędne prostokątne środka ciężkości bryły są określone wzorami:

$$x_C = \frac{\int_G x dG}{G}, \quad y_C = \frac{\int_G y dG}{G}, \quad z_C = \frac{\int_G z dG}{G}. \tag{4.6}$$

Załóżmy obecnie, że pole sił ciężkości jest polem jednorodnym, czyli przyśpieszenie ziemskie nie ulega zmianie, tzn. g = const w całym rozpatrywanym układzie materialnym. Możemy wtedy zapisać:

$$G = g\,m \quad \text{i} \quad dG = g\,dm,$$

gdzie m jest masą całego układu lub ciała materialnego. Po podstawieniu tych zależności do wzorów (4.5) i (4.6) i po skróceniu przez g otrzymamy wzory:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\int_m \mathbf{r}\, dm}{m}, \tag{4.7}$$

$$x_C = \frac{\int_m x dm}{m}, \quad y_C = \frac{\int_m y dm}{m}, \quad z_C = \frac{\int_m z dm}{m}. \tag{4.8}$$

Określają one położenie środka masy bryły. W przypadku układu punktów materialnych środek masy będzie określony przez analogiczne wzory, z tym że miejsce całek zajmą sumy:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k\, m_k}{m}, \tag{4.9}$$

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k m_k}{m}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k m_k}{m}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k m_k}{m}. \tag{4.10}$$

Ze wzorów (4.7–4.10) wynika, że przy przyjętych założeniach w jednorodnym polu sił ciężkości środek masy pokrywa się ze środkiem ciężkości. Z tego względu mówiąc o środku ciężkości, możemy mieć na myśli środek masy i odwrotnie. Trzeba jednak pamiętać, przy jakich założeniach te dwa punkty się pokrywają.