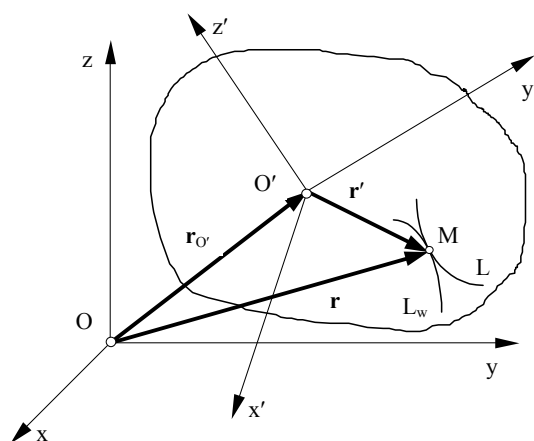


5.4.1. Ruch unoszenia, względny i bezwzględny

Przy omawianiu ruchu punktu lub bryły zakładaliśmy, że punkt lub bryła poruszały się względem układu odniesienia x, y, z uważanego za nieruchomy.



Rys. 5.24. Ruch złożony punktu

Można rozpatrzyć taki przypadek, że wspomniany układ odniesienia będzie się poruszał względem innego układu, uważanego wtedy za nieruchomy. Wówczas ruch punktu lub bryły nazywamy ruchem złożonym.

Ruch punktu lub bryły względem układu nieruchomego nazywamy *ruchem bezwzględnym*, a ruch tego samego punktu lub bryły względem układu ruchomego *ruchem względnym*.

Ruch ruchomego układu odniesienia względem nieruchomego nazywamy *ruchem unoszenia*.

W dalszej części rozpatrzmy jedynie ruch złożony punktu. Niech punkt M porusza się w sposób dowolny, nie związany ani z nieruchomym układem odniesienia x, y, z , ani z ruchomym x', y', z' (rys. 5.24). Jeżeli ruch tego punktu będzie obserwowany przez dwóch obserwatorów – jednego związanego z układem nieruchomym x, y, z , a drugiego związanego z układem ruchomym x', y', z' – to każdy z obserwatorów będzie „widział” ruch punktu M w inny sposób (inny tor, prędkość, przyspieszenie).

Tor, jaki zakreśli punkt M w układzie nieruchomym, nazywamy *torem bezwzględnym* L , a w układzie ruchomym *torem względnym* L_w . Każdy z punktów toru względnego, zatem i punkt znajdujący się w tym samym miejscu co punkt M , zakreśli pewien tor L_u . Ruch tego punktu względem układu nieruchomego nazywamy *ruchem unoszenia* punktu M w rozważanej chwili.

5.4.2. Prędkość i przyspieszenie w ruchu złożonym punktu

W celu wyprowadzenia wzorów na prędkość i przyspieszenie punktu M postąpimy podobnie jak podczas rozpatrywania kinematyki dowolnego punktu bryły w ruchu ogólnym, ale teraz punkt ten będzie się poruszał względem bryły. Zatem wektor wodzący \mathbf{r}' punktu M w układzie ruchomym x', y', z' nie będzie stały, będzie się zmieniał zarówno jego kierunek, jak i moduł:

$$r' = |\mathbf{r}'| \neq \text{const}. \quad (\text{a})$$

Wektor wodzący punktu M, zgodnie z rys. 5.24, jest sumą dwóch wektorów:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}'. \quad (5.76)$$

Podobnie jak w ruchu ogólnym bryły (p. 5.3.2) wektor $\mathbf{r}_{O'}$ jest wektorem łączącym początki obu układów współrzędnych. Zapiszemy go analitycznie w nieruchomym układzie współrzędnych x, y, z :

$$\mathbf{r}_{O'} = x_{O'} \mathbf{i} + y_{O'} \mathbf{j} + z_{O'} \mathbf{k}. \quad (5.77)$$

Wektor \mathbf{r}' jest wektorem wodzącym punktu M w układzie x', y', z' . Można go wyrazić za pomocą współrzędnych w tym układzie:

$$\mathbf{r}' = x' \mathbf{i}' + y' \mathbf{j}' + z' \mathbf{k}'. \quad (5.78)$$

Współrzędne tego wektora na podstawie wzoru (a) będą się zmieniać wraz z ruchem punktu M względem układu ruchomego x', y', z' . Można je zatem zapisać w postaci funkcji czasu, które będą równaniami ruchu względnego punktu M:

$$x' = x'(t), \quad y' = y'(t), \quad z' = z'(t). \quad (5.79)$$

Prędkość punktu M jest pochodną wektora wodzącego (5.76) względem czasu:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}_{O'}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt}. \quad (5.80)$$

Pochodna wektora $\mathbf{r}_{O'}$ jest znaną z p. 5.3.2 prędkością początku O' ruchomego układu współrzędnych:

$$\mathbf{v}_{O'} = \frac{d\mathbf{r}_{O'}}{dt} = \frac{dx_{O'}}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy_{O'}}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz_{O'}}{dt} \mathbf{k}. \quad (\text{b})$$

Pochodna wektora \mathbf{r}' po zróżniczkowaniu wzoru (5.78) ma postać:

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt}\mathbf{k}' + x'\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y'\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z'\frac{d\mathbf{k}'}{dt}. \quad (\text{c})$$

Pierwsze trzy wyrazy w powyższym wzorze przedstawiają prędkość względną \mathbf{v}_w punktu M:

$$\mathbf{v}_w = \frac{dx'}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt}\mathbf{k}'. \quad (5.81)$$

Po podstawieniu do trzech pozostałych wyrazów wzorów (5.31) na pochodne wektorów \mathbf{i}' , \mathbf{j}' , \mathbf{k}' otrzymamy:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}'}{dt} &= \mathbf{v}_w + x'(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}') + y'(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}') + z'(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}') = \\ &= \mathbf{v}_w + \boldsymbol{\omega} \times (x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'). \end{aligned}$$

Wyrażenie występujące w nawiasie, zgodnie ze wzorem (5.80), jest wektorem wodzącym punktu M. Zatem powyższy wzór upraszcza się do postaci:

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}_w + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'. \quad (\text{d})$$

Po podstawieniu do wzoru (5.80) oznaczenia (b) oraz wzoru (d) otrzymamy zależność na prędkość punktu M w ruchu złożonym względem nieruchomego układu odniesienia (prędkość bezwzględna):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}_w. \quad (5.82)$$

Po porównaniu ze wzorem (5.32) widzimy, że pierwsze dwa wyrazy w tym wzorze przedstawiają prędkość punktu bryły znajdującego się w tym samym miejscu co punkt M, zatem jest to prędkość unoszenia:

$$\mathbf{v}_u = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'. \quad (5.83)$$

Po uwzględnieniu tego oznaczenia we wzorze (5.82) zauważymy, że prędkość bezwzględna \mathbf{v} w ruchu złożonym punktu jest sumą prędkości unoszenia \mathbf{v}_u i prędkości względnej \mathbf{v}_w :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_u + \mathbf{v}_w. \quad (5.84)$$

Przyśpieszenie bezwzględne \mathbf{a} otrzymamy, obliczając pochodną względem czasu prędkości bezwzględnej w postaci (5.82):

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_w}{dt}. \quad (\text{e})$$

Pochodna

$$\mathbf{a}_{O'} = \frac{d\mathbf{v}_{O'}}{dt} \quad (\text{f})$$

jest przyspieszeniem punktu O' , a pochodna

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{g})$$

przyspieszeniem kątowym bryły.

Występującą we wzorze (e) pochodną wektora \mathbf{r}' względem czasu obliczyliśmy już przy wyprowadzaniu wzoru na prędkość punktu M. Jest ona dana wzorem (d). W celu obliczenia pochodnej prędkości względnej \mathbf{v}_w względem czasu zróżniczkujemy wzór (5.81) oraz wykorzystamy zależności (5.31):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_w}{dt} &= \frac{d^2x'}{dt^2} \mathbf{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2} \mathbf{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2} \mathbf{k}' + \frac{dx'}{dt} \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \\ &= \mathbf{a}_w + \frac{dx'}{dt} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}') + \frac{dy'}{dt} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}') + \frac{dz'}{dt} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}') = \\ &= \mathbf{a}_w + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{dx'}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt} \mathbf{k}' \right) = \mathbf{a}_w + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_w, \end{aligned} \quad (\text{h})$$

gdzie \mathbf{a}_w jest przyspieszeniem względnym punktu M:

$$\mathbf{a}_w = \frac{d^2x'}{dt^2} \mathbf{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2} \mathbf{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2} \mathbf{k}'. \quad (5.85)$$

Po uwzględnieniu we wzorze (e) oznaczeń (f) i (g) oraz wzoru (h) otrzymamy przyspieszenie \mathbf{a} punktu M.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}_{O'} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}_w) + \mathbf{a}_w + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_w = \\ &= \mathbf{a}_{O'} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \mathbf{a}_w + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_w. \end{aligned} \quad (5.86)$$

Pierwsze trzy wyrazy w tym wzorze znamy z ruchu ogólnego bryły jako przyspieszenie dowolnego punktu bryły (wzór 5.33), a więc jest to przyspieszenie unoszenia \mathbf{a}_u :

$$\mathbf{a}_u = \mathbf{a}_{O'} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'). \quad (5.87)$$

Z kolei podwojony iloczyn wektorowy prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$ i prędkości względnej \mathbf{v}_w jest przyspieszeniem znanym jako *przyspieszenie Coriolisa*:

$$\mathbf{a}_C = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_w. \quad (5.88)$$

Tak więc przyspieszenie bezwzględne \mathbf{a} punktu M w ruchu złożonym jest równe sumie trzech przyspieszeń: unoszenia \mathbf{a}_u , względnego \mathbf{a}_w i Coriolisa \mathbf{a}_C :

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_u + \mathbf{a}_w + \mathbf{a}_C. \quad (5.89)$$

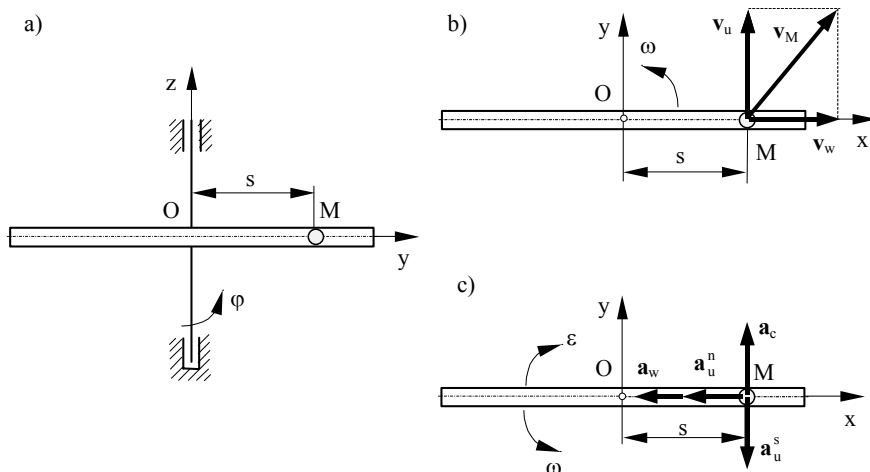
Przyspieszenie Coriolisa jest dodatkowym przyspieszeniem wynikającym z ruchu obrotowego układu unoszenia. Można udowodnić [9], że jest ono wywołane zmianą wektora prędkości względnej \mathbf{v}_w wskutek jego obrotu z prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$ oraz zmianą wektora prędkości unoszenia \mathbf{v}_u spowodowaną przemieszczaniem się punktu M z prędkością względną \mathbf{v}_w .

Z własności iloczynu wektorowego wynika, że przyspieszenie Coriolisa będzie równe zeru w trzech przypadkach:

- gdy $\boldsymbol{\omega} = 0$, wtedy ruch unoszenia jest ruchem postępowym,
- gdy wektory prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$ i prędkości względnej \mathbf{v}_w punktu M są równoległe,
- gdy prędkość względna \mathbf{v}_w punktu M w pewnej chwili jest równa zeru.

W zagadnieniach technicznych najczęściej przyjmujemy, że układ odniesienia związany z Ziemią jest nieruchomy. Tym samym pomijamy przyspieszenie Coriolisa działające na obiekty poruszające się względem Ziemi, np. pojazdy, a wywołane jej obrotem wokół własnej osi. Takie postępowanie jest usprawiedliwione, ponieważ przyspieszenie to jest bardzo małe [11]. Jednak przyspieszenie Coriolisa towarzyszy wielu zjawiskom występującym w przyrodzie, wywołanym obrotem kuli ziemskiej. Do zjawisk tych należą przykładowo kierunki prądów morskich i wiatrów.

Przykład 5.7. Pozioma rurka obraca się wokół pionowej osi z, przechodzącej przez jej środek (rys. 5.25a), zgodnie z równaniem ruchu: $\varphi = 10t - 1t^2$, gdzie czas t jest wyrażony w sekundach, a kąt φ w radianach. Wewnątrz rurki porusza się punkt M zgodnie równaniem: $OM = s = 15\sin \pi t / 3$ [cm]. Obliczyć prędkość i przyspieszenie bezwzględne punktu M dla czasu $t_1 = 1$ s.



Rys. 5.25. Wyznaczenie prędkości i przyspieszenia punktu M w ruchu złożonym

Rozwiązanie. Punkt M porusza się ruchem złożonym z ruchu unoszenia wywołanego obrotem rurki i ruchu względnego względem rurki. Prędkość bezwzględną punktu M obliczymy ze wzoru (5.84):

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_u + \mathbf{v}_w \quad (\text{a})$$

Wartość prędkości unoszenia punktu M wynikająca z ruchu obrotowego rurki

$$v_u = \omega s = (10 - 2t) \cdot 15 \sin \frac{\pi}{3} t = (150 - 30t) \sin \frac{\pi}{3} t,$$

gdzie ω jest wartością prędkości kątowej rurki:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 10 - 2t [\text{s}^{-1}].$$

Wartość prędkości względnej punktu M

$$v_w = \frac{ds}{dt} = 15 \cdot \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} t = 5\pi \cos \frac{\pi}{3} t.$$

Wektory prędkości unoszenia i prędkości względnej zaznaczono na rys. 5.25b przedstawiającym rurkę w rzucie z góry. Dla czasu $t_1 = 1$ s otrzymujemy:

$$v_u = (150 - 30) \sin \frac{\pi}{3} = 60\sqrt{3} = 103,9 \text{ cm/s},$$

$$v_w = 5\pi \cos \frac{\pi}{3} = 2,5\pi = 7,85 \text{ cm/s}.$$

Ponieważ wektory tych prędkości są prostopadłe, wartość prędkości bezwzględnej punktu M

$$v_M = \sqrt{v_u^2 + v_w^2} = \sqrt{103,9^2 + 7,85^2} = 104,20 \text{ cm/s}.$$

Przyśpieszenie bezwzględne punktu M obliczymy ze wzoru (5.89):

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_u + \mathbf{a}_w + \mathbf{a}_C = \mathbf{a}_u^s + \mathbf{a}_u^n + \mathbf{a}_w + \mathbf{a}_C. \quad (\text{b})$$

Wartości przyśpieszeń w ruchu unoszenia są następujące:

$$\left. \begin{aligned} a_u^s &= \varepsilon s = -2 \cdot 15 \cos \frac{\pi}{3} t = -30 \sin \frac{\pi}{3} t, \\ a_u^n &= \omega^2 s = 15(10 - 2t)^2 \sin \frac{\pi}{3} t, \\ \varepsilon &= \frac{d\omega}{dt} = -2s^{-2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{c})$$

Wartość przyśpieszenia względnego punktu M obliczymy ze wzoru:

$$a_w = \frac{dv_w}{dt} = -\frac{5}{3} \pi^2 \sin \frac{\pi}{3} t. \quad (\text{d})$$

Z kolei przyśpieszenie Coriolisa wyraża wzór (5.88):

$$\mathbf{a}_C = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_w,$$

a jego wartość

$$a_C = 2\omega v_w \sin \frac{\pi}{2} = 10(10 - 2t)\pi \cos \frac{\pi}{3} t = (100 - 20t)\pi \cos \frac{\pi}{3} t. \quad (\text{e})$$

Wektory składowych przyśpieszeń występujące we wzorze (b) przedstawiono na rys. 2.25c. Wartości tych przyśpieszeń w chwili t_1 otrzymamy po podstawieniu do wzorów (c), (d) i (e) $t = t_1 = 1 \text{ s}$:

$$a_u^s = 30 \sin \frac{\pi}{3} = -15\sqrt{3} = -25,98 \text{ cm/s}^2,$$

$$a_u^n = 8^2 \cdot 15 \sin \frac{\pi}{3} = 480\sqrt{3} = 831,38 \text{ cm/s}^2,$$

$$a_w = -\frac{5}{3} \pi^2 \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{5\sqrt{3}}{6} \pi^2 = -14,25 \text{ cm/s}^2,$$

$$a_c = 80\pi \cos \frac{\pi}{3} = 40\pi = 125,66 \text{ cm/s}^2.$$

Na podstawie rys. 5.25c wartość przyspieszenia bezwzględnego punktu M obliczymy ze wzoru:

$$a_M = \sqrt{(a_w + a_u^n)^2 + (a_c - a_u^s)^2} = \sqrt{845,63^2 + 99,68^2} = 851,48 \text{ cm/s}^2.$$