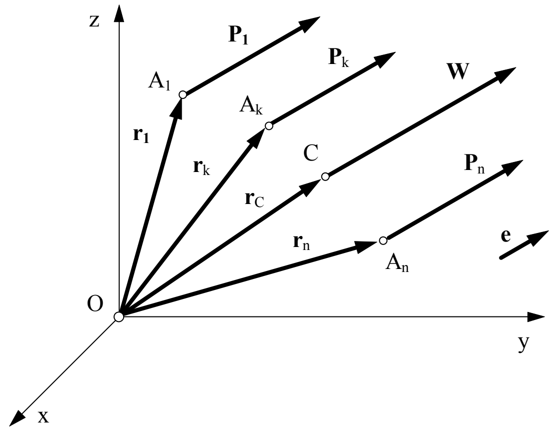
3.9.1. Środek układu sił równoległych

Załóżmy, że mamy przestrzenny układ n sił równoległych $\mathbf{P}_k$ przyłożonych w punktach A_k (k = 1, 2, . . . , n), jak na rys. 3.31. Jeżeli wektor główny **W** tego układu sił będzie różny od zera, to układ sił można zredukować do wypadkowej. Wypadkowa, jak wiadomo, jest równa wektorowi głównemu, ale ma ściśle określoną linię działania, zwaną osią centralną. W dalszym ciągu zajmiemy się wyznaczeniem linii działania wypadkowej **W**, a dokładniej wyznaczymy położenie punktu C, przez który ona przechodzi (rys. 3.31).



Rys. 3.31. Środek układu sił równoległych

Niech kierunek w przestrzeni rozważanego układu sił określa wektor jednostkowy **e** równoległy do kierunku sił. Wtedy każdą siłę $\mathbf{P}_k$ możemy zapisać w postaci iloczynu modułu siły P_k opatrzonego znakiem i wektora jednostkowego **e**:

$$\mathbf{P}_k = P_k\,\mathbf{e}\,. \tag{a}$$

Po uwzględnieniu tej zależności wektor główny układu sił równoległych możemy przedstawić w postaci:

$$\mathbf{W} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_k = \left(\sum_{k=1}^{n} P_k\right)\mathbf{e}\,. \tag{b}$$

Jeżeli przyjmiemy dowolny biegun redukcji O i oznaczymy wektory wodzące punktów zaczepienia sił przez $\mathbf{r}_k$ (k = 1, 2, . . . , n), to po uwzględnieniu wzoru (a) moment główny względem tego bieguna

$$\mathbf{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{P}_k = \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k\, P_k\right)\times \mathbf{e}\,. \tag{c}$$

W celu wyznaczenia położenia punktu C opisanego wektorem wodzącym $\mathbf{r}_C$ obliczymy moment główny względem tego punktu. Na podstawie twierdzenia o momencie głównym (3.29) moment główny $\mathbf{M}_C$ wyraża wzór:

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{M}_O + \mathbf{CO} \times \mathbf{W}\,.$$

Po uwzględnieniu, że $\mathbf{CO} = -\mathbf{r}_C$, oraz wzorów (b) i (c) otrzymamy:

$$\mathbf{M}_C = \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k\, P_k\right) \times \mathbf{e} - \mathbf{r}_C \times \left(\sum_{k=1}^{n} P_k\right) \mathbf{e} = \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k\, P_k - \mathbf{r}_C \sum_{k=1}^{n} P_k\right) \times \mathbf{e}\,. \tag{d}$$

Ponieważ przez punkt C przechodzi wypadkowa **W**, moment główny $\mathbf{M}_C$ względem tego punktu musi być równy zeru. Zatem wzór (d) przekształca się w równanie:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k\, P_k - \mathbf{r}_C \sum_{k=1}^{n} P_k\right) \times \mathbf{e} = 0\,. \tag{e}$$

Aby powyższe równanie było spełnione dla dowolnego kierunku wektora jednostkowego **e,** wyrażenie w nawiasie musi być równe zeru:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k\, P_k - \mathbf{r}_C \sum_{k=1}^{n} P_k = 0\,.$$

Stąd położenie punktu C określa wzór wektorowy:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k\, P_k}{\sum_{k=1}^{n} P_k}\,. \tag{3.54}$$

Można udowodnić [16], że jeżeli wszystkie siły $\mathbf{P}_k$ obrócimy o ten sam kąt, nie zmieniając ich punktów przyłożenia, to wypadkowa tego obróconego układu sił równoległych również przejdzie przez punkt C.

Punkt C, przez który przechodzi wypadkowa układu sił równoległych o określonych punktach przyłożenia, niezależnie od ich kierunku, nazywamy *środkiem układu sił równoległych*.

Po przyjęciu w biegunie O początku prostokątnego układu współrzędnych x, y, z i wyrażeniu wektorów $\mathbf{r}_k$ i $\mathbf{r}_C$ we wzorze za pomocą ich współrzędnych:

$$\mathbf{r}_k = x_k\,\mathbf{i} + y_k\,\mathbf{j} + z_k\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_C = x_C\,\mathbf{i} + y_C\,\mathbf{j} + z_C\,\mathbf{k}$$

z porównania wyrazów występujących przy tych samych wersorach otrzymamy wzory na współrzędne punktu C:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k P_k}{\sum_{k=1}^{n} P_k}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k P_k}{\sum_{k=1}^{n} P_k}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k P_k}{\sum_{k=1}^{n} P_k}\,. \tag{3.55}$$

Wyprowadzone wyżej wzory na środek układu sił równoległych wykorzystamy do określenia współrzędnych środków ciężkości ciał materialnych, albowiem najczęstszym przykładem sił równoległych są siły ciężkości.

3.9.2. Warunki równowagi układu sił równoległych

Układ sił równoległych jest szczególnym przypadkiem dowolnego układu sił. Z tego względu warunki równowagi przestrzennego układu sił równoległych wyznaczymy na podstawie warunków równowagi dowolnego układu sił (3.33). W tym celu założymy, że siły są równoległe do osi z prostokątnego układu współrzędnych x, y, z. W tej sytuacji rzuty wszystkich sił na osie x i y będą tożsamościowo równe zeru. Analogicznie momenty wszystkich sił względem osi z, jako osi równoległej do wszystkich sił, będą również równe zeru. Wówczas sześć równań równowagi upraszcza się do trzech, tzn. równania rzutów na oś z oraz równań momentów względem osi x i y:

$$\sum_{k=1}^{n} P_{kz} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{ky} = 0. \tag{3.56}$$

Z otrzymanych równań równowagi wynika, że zagadnienie dotyczące równowagi przestrzennego układu sił równoległych będzie statycznie wyznaczalne, jeżeli będą w nim trzy niewiadome.
W przypadku układu sił równoległych leżących w jednej płaszczyźnie, np. xy, i równoległych do osi y sumy rzutów wszystkich sił na oś x będą tożsamościowo równe zeru. Zatem trzy równania równowagi płaskiego dowolnego układu sił (3.51) redukują się do równania rzutów sił na oś y i równania momentów względem dowolnego punktu O:

$$\sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{kO} \;. \tag{3.57}$$

Równania równowagi w postaci jednego równania rzutów i jednego równania momentów (3.57) można zastąpić dwoma równaniami momentów względem dwóch punktów A i B nie leżących na prostej równoległej do linii działania sił:

$$\sum_{k=1}^{n} M_{kA} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{kB} = 0. \tag{3.58}$$