

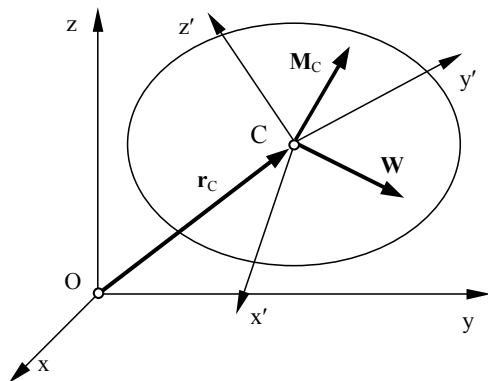
7.5.1. Ruch bryły swobodnej

Swobodna bryła sztywna ma w przestrzeni sześć stopni swobody i do określenia jej ruchu potrzeba sześciu równań ruchu. Ruch bryły możemy rozbić na ruch środka masy, wywołany przez działanie wektora głównego sił zewnętrznych, i obrót bryły względem środka masy, wywołany przez moment główny sił zewnętrznych zredukowany do środka masy.

Do ułożenia równań ruchu bryły wykorzystamy wyprowadzone poprzednio zasady pędu i krętu. W punkcie 7.2.3 wykazano, że pochodna pędu względem czasu równa wektorowi głównemu sił zewnętrznych opisuje ruch środka masy, a w punkcie 7.3.5, że pochodna krętu zredukowanego do środka masy względem czasu równa momentowi głównemu sił zewnętrznych opisuje obrót bryły względem środka masy. Mamy więc dwa równania wektorowe opisujące ruch bryły swobodnej:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{W}, \quad \frac{d\mathbf{k}_C}{dt} = \mathbf{M}_C. \quad (7.90)$$

Te dwa równania wektorowe są równoważne sześciu równaniom skalarnym. Otrzymamy je po zrzutowaniu wektorów występujących w powyższych



Rys. 7.24. Ruch swobodny bryły sztywnej

równaniach na osie prostokątnego układu współrzędnych. Podobnie jak przy obliczaniu krętu bryły przyjmiemy dwa układy współrzędnych: jeden nieruchomy x, y, z o początku w dowolnym punkcie O i drugi ruchomy x', y', z' sztywno związany z bryłą o początku w środku masy C (rys. 7.24). Ponadto dla uproszczenia obliczeń założymy, że osie x', y', z' układu ruchomego są głównymi centralnymi osiami bezwładności. Przy takim założeniu zgodnie ze wzorem (7.66) kręt bryły

$$\mathbf{k}_C = \omega_{x'} I_{x'} \mathbf{i}' + \omega_{y'} I_{y'} \mathbf{j}' + \omega_{z'} I_{z'} \mathbf{k}', \quad (a)$$

gdzie $I_{x'}, I_{y'}, I_{z'}$ są głównymi centralnymi momentami bezwładności, a $\omega_{x'}, \omega_{y'}, \omega_{z'}$ współrzędnymi wektora prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$ w układzie ruchomym.

W pierwszej kolejności obliczymy pochodną krętu \mathbf{k}_C względem czasu z wykorzystaniem podanych w kinematyce bryły wzorów na pochodne względem czasu wektorów układu ruchomego (5.31).

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{i}'}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}', & \frac{d\mathbf{j}'}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}', & \frac{d\mathbf{k}'}{dt} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}' . \\ \frac{d\mathbf{k}_C}{dt} &= I_{x'} \frac{d\omega_{x'}}{dt} \mathbf{i}' + I_{y'} \frac{d\omega_{y'}}{dt} \mathbf{j}' + I_{z'} \frac{d\omega_{z'}}{dt} \mathbf{k}' + \\ &+ I_{x'} \omega_{x'} \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + I_{y'} \omega_{y'} \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + I_{z'} \omega_{z'} \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \\ &= I_{x'} \frac{d\omega_{x'}}{dt} \mathbf{i}' + I_{y'} \frac{d\omega_{y'}}{dt} \mathbf{j}' + I_{z'} \frac{d\omega_{z'}}{dt} \mathbf{k}' + \\ &+ \boldsymbol{\omega} \times (I_{x'} \omega_{x'} \mathbf{i}' + I_{y'} \omega_{y'} \mathbf{j}' + I_{z'} \omega_{z'} \mathbf{k}') .\end{aligned}$$

Wyrażenie w nawiasie w powyższym wzorze jest krętem bryły względem środka masy. Zatem pochodną krętu \mathbf{k}_C względem czasu

$$\frac{d\mathbf{k}_C}{dt} = I_{x'} \frac{d\omega_{x'}}{dt} \mathbf{i}' + I_{y'} \frac{d\omega_{y'}}{dt} \mathbf{j}' + I_{z'} \frac{d\omega_{z'}}{dt} \mathbf{k}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_C . \quad (7.91)$$

Po obliczeniu iloczynu wektorowego występującego w tym wzorze oraz odpowiednim pogrupowaniu wyrazów otrzymamy ostatecznie:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{k}_C}{dt} &= \left[I_{x'} \frac{d\omega_{x'}}{dt} + (I_{z'} - I_{y'}) \omega_{y'} \omega_{z'} \right] \mathbf{i}' + \\ &+ \left[I_{y'} \frac{d\omega_{y'}}{dt} + (I_{x'} - I_{z'}) \omega_{x'} \omega_{z'} \right] \mathbf{j}' + \\ &+ \left[I_{z'} \frac{d\omega_{z'}}{dt} + (I_{y'} - I_{x'}) \omega_{x'} \omega_{y'} \right] \mathbf{k}' .\end{aligned} \quad (7.92)$$

Po zapisaniu występującego w równaniach (7.90) wektora głównego \mathbf{W} i momentu głównego \mathbf{M}_O w ruchomym układzie współrzędnych:

$$\begin{aligned}\mathbf{W} &= W_{x'} \mathbf{i}' + W_{y'} \mathbf{j}' + W_{z'} \mathbf{k}' , \\ \mathbf{M}_C &= M_{Cx'} \mathbf{i}' + M_{Cy'} \mathbf{j}' + M_{Cz'} \mathbf{k}'\end{aligned}$$

oraz podstawieniu do drugiego równania (7.90) wzoru (7.92) i porównaniu wyrażen przy wektorach otrzymamy sześć skalarnych równań ruchu bryły:

$$\left. \begin{aligned}
ma_{Cy'} &= W_{y'}, \\
ma_{Cx'} &= W_{x'}, \\
ma_{Cz'} &= W_{z'}, \\
I_{x'}\varepsilon_{x'} + (I_{z'} - I_{y'})\omega_{y'}\omega_{z'} &= M_{Cx'}, \\
I_{y'}\varepsilon_{y'} + (I_{x'} - I_{z'})\omega_{x'}\omega_{z'} &= M_{Cy'}, \\
I_{z'}\varepsilon_{z'} + (I_{y'} - I_{x'})\omega_{x'}\omega_{y'} &= M_{Cz'},
\end{aligned} \right\} \quad (7.93)$$

w których zamiast pochodnych względem czasu współrzędnych prędkości kątowej ω wprowadzono odpowiednie współrzędne przyspieszenia kątowego ε :

$$\varepsilon_{x'} = \frac{d\omega_{x'}}{dt}, \varepsilon_{y'} = \frac{d\omega_{y'}}{dt}, \varepsilon_{z'} = \frac{d\omega_{z'}}{dt},$$

a $a_{Cx'}$, $a_{Cy'}$, $a_{Cz'}$ są współrzędnymi przyspieszenia \mathbf{a}_C środka masy C.

Powyższe równania różniczkowe wraz z warunkami początkowymi jednoznacznie opisują ruch bryły pod wpływem przyłożonego do niej układu sił.

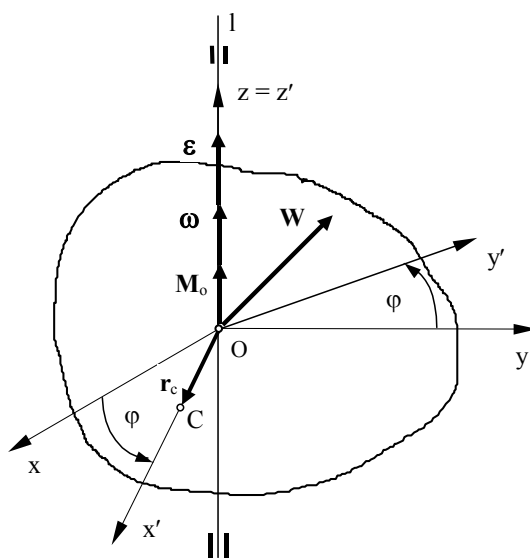
Przy wyprowadzaniu równań ruchu bryły (7.93) za biegun redukcji przyjęto środek masy C bryły. Początek ruchomego układu współrzędnych można przyjąć poza środkiem masy, pod warunkiem że punkt ten jest nieruchomy. Jeżeli w poruszającej się bryle istnieje nieruchomy punkt, np. O, to obierając go za biegun redukcji, otrzymamy równania o postaci (7.93), ale wtedy zamiast współrzędnych $M_{Cx'}$, $M_{Cy'}$, $M_{Cz'}$ momentu głównego \mathbf{M}_C zredukowanego do środka masy C należy podstawić współrzędne $M_{Ox'}$, $M_{Oy'}$, $M_{Oz'}$ momentu \mathbf{M}_O zredukowanego do tego nieruchomego punktu. Występujące w tych równaniach momenty bezwładności muszą być głównymi momentami bezwładności.

7.5.2. Obrót bryły wokół stałej osi obrotu

Obrót dowolny bryły wokół głównej osi bezwładności

Ważnym zagadnieniem w dynamice maszyn jest ruch obrotowy bryły wokół stałej osi obrotu. Z tym zagadnieniem mamy do czynienia we wszystkich maszynach wirnikowych. Aby taki ruch można było zrealizować, bryła (wirnik) musi być ograniczona więzami. Są nimi najczęściej łożyska, w których w czasie ruchu bryły powstają odpowiednie reakcje.

Z kinematyki wiadomo, że obracająca się bryła wokół stałej osi obrotu ma jeden stopień swobody. Taki ruch bryły można jednoznacznie opisać jednym równaniem ruchu w postaci kąta obrotu w funkcji czasu $\varphi = \varphi(t)$.



Rys. 7.25. Ruch obrotowy bryły sztywnej wokół głównej osi bezwładności

Dla wyprowadzenia dynamicznego równania ruchu bryły założymy, że bryła obraca się ruchem dowolnym, czyli że prędkość kątowa bryły nie jest stała, wokół osi $z = z'$ będącej główną osią bezwładności (rys. 7.25). Ponadto przyjmujemy, że początki nieruchomego układu współrzędnych x, y, z i ruchomego znajdują się w nieruchomym punkcie O znajdującym się na osi obrotu l . Poza tym dla uproszczenia wzorów założymy, że środek masy C bryły leży na osi x' .

Ponieważ dla takiego ruchu prędkość kątowa ω i przyspieszenie kątowe ε leżą na osi obrotu, zatem

$$\omega_{x'} = \omega_{y'} = 0 \text{ i } \varepsilon_{x'} = \varepsilon_{y'} = 0, \quad (\text{b})$$

a wektory $\boldsymbol{\omega}$ i $\boldsymbol{\varepsilon}$ można zapisać wzorami:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \omega_z \mathbf{k} = \omega_{z'} \mathbf{k}' = \dot{\omega} \mathbf{k}' = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{k}', \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \varepsilon_z \mathbf{k} = \varepsilon_{z'} \mathbf{k}' = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d\dot{\omega}}{dt} \mathbf{k}' = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \mathbf{k}'. \end{aligned}$$

Przyśpieszenie \mathbf{a}_C środka masy C obliczymy ze wzoru (5.37) podanego w p. 5.3.4 dotyczącym kinematyki ruchu obrotowego:

$$\mathbf{a}_C = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_C + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C).$$

Po podstawieniu do tego wzoru zależności $\mathbf{r}_C = r_C \mathbf{i}'$, wynikającej wprost z rys. 7.25, otrzymamy:

$$\mathbf{a}_C = \varepsilon \mathbf{k}' \times r_C \mathbf{i}' + \omega \mathbf{k}' \times (\omega \mathbf{k}' \times r_C \mathbf{i}') = \varepsilon r_C \mathbf{j}' - \omega^2 r_C \mathbf{i}',$$

czyli współrzędne przyśpieszenia środka masy wynoszą:

$$a_{Cx'} = -\omega^2 r_C, \quad a_{Cy'} = \varepsilon r_C, \quad a_{Cz'} = 0. \quad (\text{c})$$

Wyprowadzone w poprzednim punkcie równania (7.93) po podstawieniu zależności (b) oraz wzorów (c) redukują się do postaci (7.94):

$$\begin{aligned} -m\omega^2 r_C &= W_{x'}, \\ m\varepsilon r_C &= W_{y'}, \\ I_{z'} \varepsilon_{z'} &= M_{Oz'}. \end{aligned} \quad (7.94)$$

Stąd

$$M_{Ox'} = 0, \quad M_{Oy'} = 0 \quad \text{oraz} \quad W_{z'} = 0. \quad (\text{d})$$

Z zależności (d) oraz z równań (7.94) wynika, że w przypadku obrotu bryły wokół głównej osi bezwładności układ sił zewnętrznych redukuje się do momentu głównego \mathbf{M}_O leżącego na osi obrotu l i wektora głównego \mathbf{W} leżącego w płaszczyźnie $x' y'$ i prostopadłego do tej osi.

Trzecie z równań (7.94) jest dynamicznym równaniem ruchu obrotowego bryły i przy znanych warunkach początkowych pozwala na wyznaczenie równania jej ruchu $\varphi = \varphi(t)$. Z dwóch pierwszych równań możemy wyznaczyć siły wywołane tym, że środek masy leży poza osią obrotu, czyli oś obrotu nie jest główną centralną osią bezwładności, albo – używając terminologii z dynamiki maszyn –

bryła jest *niewyważona statycznie*. Równania te pozwalają na wyznaczenie reakcji więzów (reakcji łożysk).

Jeżeli oś obrotu l będzie główną centralną osią bezwładności, czyli środek masy C będzie leżał na osi obrotu ($\mathbf{r}_C = 0$), co będzie oznaczało idealne wyważenie bryły, równania (7.94) redukują się do jednego równania:

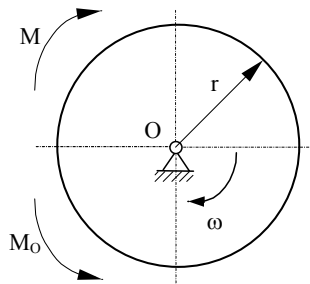
$$I_{z'} \varepsilon_{z'} = M_{Oz'}, \quad (7.95)$$

a po uwzględnieniu (d) widzimy, że wszystkie współrzędne wektora głównego oraz dwie współrzędne momentu głównego są równe zero:

$$W_{x'} = W_{y'} = W_{z'} = 0 \quad \text{oraz} \quad M_{Ox'} = M_{Oy'} = 0. \quad (e)$$

Z dynamicznego równania ruchu obrotowego bryły (7.95) wynika, że jeżeli suma momentów wszystkich sił zewnętrznych (sił czynnych i reakcji łożysk osi obrotu) względem osi obrotu będzie równa zero, $M_{Oz'} = 0$, to również $\varepsilon = d\omega/dt = 0$, zatem prędkość kątowna będzie stała, $\omega = \text{const}$, czyli bryła będzie się poruszać ruchem jednostajnie obrotowym. Z takim przypadkiem będziemy mieli do czynienia, gdy bryła będzie się obracać wokół pionowej osi obrotu osadzonej w idealnie gładkich łożyskach. Siłami zewnętrznymi są wówczas siły ciężkości i reakcje gładkich łożysk, których momenty względem osi obrotu są równe zero.

Przykład 7.14. Jednorodna tarcza o masie m i promieniu r obraca się wokół nieruchomej osi przechodzącej przez środek O tej tarczy (rys. 7.26) pod wpływem przyłożonego momentu o stałej wartości, $M = \text{const}$. Na tarczę działa moment oporu M_O proporcjonalny do prędkości kątownej ω ($M_O = k\omega$, gdzie k jest znanym współczynnikiem). Wyznaczyć prędkość kątową tarczy w funkcji czasu, $\omega = \omega(t)$, oraz jej wartość maksymalną, $\omega = \omega_{\text{max}}$.



Rys. 7.26. Wyznaczenie prędkości kątownej tarczy

Rozwiązanie. Po podstawieniu do dynamicznego równania ruchu obrotowego bryły (7.95), zgodnie z treścią zadania,

$$I_{z'} = I_O, \quad \varepsilon_{z'} = \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{oraz} \quad M_{Oz'} = M - M_O$$

otrzymamy równanie ruchu obrotowego tarczy w postaci:

$$I_O \frac{d\omega}{dt} = M - M_O \quad \text{lub} \quad I_O \frac{d\omega}{dt} = M - k\omega.$$

Moment bezwładności tarczy względem osi obrotu $I_O = mr^2 / 2$. Zatem

$$\frac{1}{2} mr^2 \frac{d\omega}{dt} = M - k\omega.$$

Po rozdzieleniu zmiennych powyższe równanie różniczkowe możemy zapisać w postaci:

$$\frac{mr^2}{2} \frac{d\omega}{M - k\omega} = dt$$

albo

$$-\frac{mr^2}{2k} \frac{-k d\omega}{M - k\omega} = dt.$$

Scalkujemy to równanie w granicach od 0 do ω oraz od 0 do t:

$$-\frac{mr^2}{2k} \int_0^{\omega} \frac{-k d\omega}{M - k\omega} = \int_0^t dt.$$

Po wykonaniu całkowania i zastąpieniu różnicy logarytmów logarytmem ilorazu otrzymamy:

$$-\frac{mr^2}{2k} \ln \left| \frac{M - k\omega}{M} \right| = t$$

lub

$$\ln \left| \frac{M - k\omega}{M} \right| = -\frac{2kt}{mr^2}.$$

Stąd prędkość kątowna

$$\omega = \frac{M}{k} \left(1 - e^{-\frac{2kt}{mr^2}} \right).$$

Z otrzymanego wzoru widzimy, że z upływem czasu t do nieskończoności drugi wyraz w nawiasie będzie dążył do zera, czyli prędkość kątowna ω będzie dążyć do wartości maksymalnej równej:

$$\omega_{\max} = \frac{M}{k}.$$

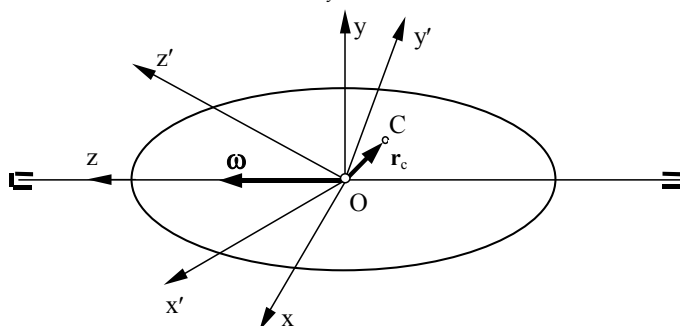
Obrót jednostajny bryły wokół osi dowolnej. Reakcje dynamiczne

Obecnie rozpatrzmy ruch bryły obracającej się ze stałą prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$ wokół dowolnej osi podpartej w łożyskach, jak na rys. 7.27. Wskutek działania sił czynnych na rozpatrywaną bryłę w łożyskach powstaną reakcje statyczne, które można wyznaczyć z poznanych w statyce warunków równowagi. Zagadnienia tego nie będziemy tutaj rozpatrywać, zajmiemy się natomiast siłami i momentami wywołanymi przez zadany ruch. Innymi słowy, rozpatrzmy ruch bezwładny bryły poruszającej się ze stałą prędkością kątową bez udziału sił zewnętrznych.

Na osi obrotu w punkcie O przyjmujemy początek nieruchomego układu współrzędnych x, y, z oraz początek układu ruchomego x', y', z' sztywno związanego z bryłą. Założymy przy tym, że osie układu ruchomego są głównymi osiami bezwładności, a środek masy nie leży na osi obrotu, czyli bryła jest niewyważona zarówno dynamicznie, jak i statycznie.

Ponieważ prędkość kątową $\boldsymbol{\omega}$ jest stała i jej rzuty $\omega_{x'}, \omega_{y'}, \omega_{z'}$ na osie ruchomego układu współrzędnych również są stałe, więc współrzędne przyspieszenia kąтового są równe zero:

$$\varepsilon_{x'} = \varepsilon_{y'} = \varepsilon_{z'} = 0. \quad (f)$$



Rys. 7.27. Ruch obrotowy bryły sztywnej wokół osi dowolnej

Zatem przyspieszenie \mathbf{a}_C środka masy bryły wyrazi wzór:

$$\mathbf{a}_C = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C) = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_C) - \mathbf{r}_C \omega^2. \quad (g)$$

Jeżeli wektor wodzący \mathbf{r}_C środka masy zapiszemy za pomocą współrzędnych w układzie ruchomym:

$$\mathbf{r}_C = x'_C \mathbf{i}' + y'_C \mathbf{j}' + z'_C \mathbf{k}',$$

to po zrzutowaniu wektora (g) na osie x', y', z' i odpowiednim pogrupowaniu wyrazów otrzymamy wzory na współrzędne przyspieszenia \mathbf{a}_C środka masy:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_{Cx'} &= \omega_{y'}(\omega_{x'}y'_C - \omega_{y'}x'_C) - \omega_{z'}(\omega_{z'}x'_C - \omega_{x'}z'_C), \\ \mathbf{a}_{Cy'} &= \omega_{z'}(\omega_{y'}z'_C - \omega_{z'}y'_C) - \omega_{x'}(\omega_{x'}y'_C - \omega_{y'}x'_C), \\ \mathbf{a}_{Cz'} &= \omega_{x'}(\omega_{z'}x'_C - \omega_{x'}z'_C) - \omega_{y'}(\omega_{y'}z'_C - \omega_{z'}y'_C). \end{aligned} \right\} \quad (\text{h})$$

Po podstawieniu zależności (f) oraz wzorów (h) do równań (7.93) i zmianie bieguna redukcji z C na O otrzymamy sześć równań opisujących omawiany ruch bryły:

$$\left. \begin{aligned} m[\omega_{y'}(\omega_{x'}y'_C - \omega_{y'}x'_C) - \omega_{z'}(\omega_{z'}x'_C - \omega_{x'}z'_C)] &= W_{x'}, \\ m[\omega_{z'}(\omega_{y'}z'_C - \omega_{z'}y'_C) - \omega_{x'}(\omega_{x'}y'_C - \omega_{y'}x'_C)] &= W_{y'}, \\ m[\omega_{x'}(\omega_{z'}x'_C - \omega_{x'}z'_C) - \omega_{y'}(\omega_{y'}z'_C - \omega_{z'}y'_C)] &= W_{z'}, \\ (I_{z'} - I_{y'})\omega_{y'}\omega_{z'} &= M_{Ox'}, \\ (I_{x'} - I_{z'})\omega_{x'}\omega_{z'} &= M_{Oy'}, \\ (I_{y'} - I_{x'})\omega_{x'}\omega_{y'} &= M_{Oz'}. \end{aligned} \right\} \quad (7.96)$$

Po uwzględnieniu we wzorze (7.91) zależności (f) oraz przyjęciu za biegun redukcji zamiast punktu C nieruchomego punktu O pochodna krętu \mathbf{k}_O względem czasu

$$\frac{d\mathbf{k}_O}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_O, \quad (\text{i})$$

a po uwzględnieniu zasady krętu możemy napisać:

$$\mathbf{M}_O = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_O. \quad (\text{j})$$

Po pomnożeniu skalarnie obu stron powyższego wzoru przez prędkość kątową $\boldsymbol{\omega}$ otrzymamy:

$$\mathbf{M}_O \cdot \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_O) \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_O) = \mathbf{k}_O \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) = 0. \quad (\text{k})$$

Warunek ten można przedstawić w postaci:

$$\mathbf{M}_O \cdot \boldsymbol{\omega} = M_{Ox'}\omega_{x'} + M_{Oy'}\omega_{y'} + M_{Oz'}\omega_{z'} = 0. \quad (\text{l})$$

Z powyższego równania wynika, że moment główny \mathbf{M}_O wywołany przez siły bezwładności jest w czasie obrotu bryły zawsze prostopadły do prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$, czyli do osi obrotu. Gdy tak nie jest, obrót jednostajny bryły nie jest możliwy.

Ponadto z warunku (I) wynika, iż tylko dwa z trzech ostatnich równań (7.96) są niezależne, czyli z równań (7.96) możemy w układzie x', y', z' wyznaczyć pięć składowych reakcji spowodowanych omawianym ruchem bryły. Ponieważ układ x', y', z' wiruje razem z bryłą wokół osi obrotu z prędkością kątową ω , z tą samą prędkością wirują reakcje w łożyskach względem układu nieruchomego x, y, z . Reakcje te nazywamy *reakcjami dynamicznymi*.

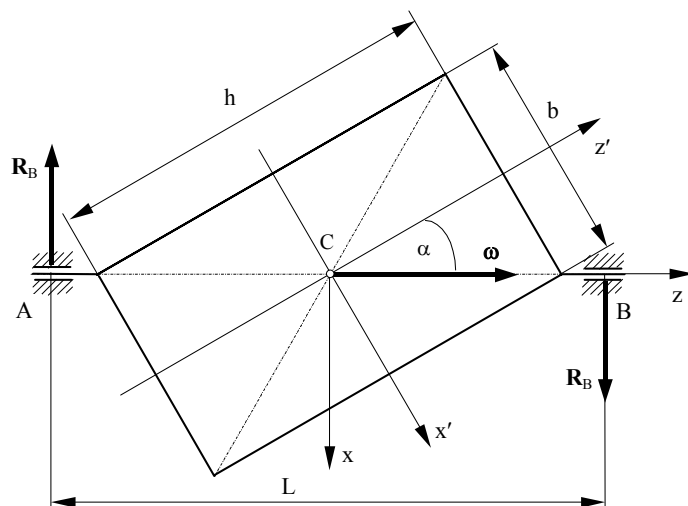
Gdy środek masy bryły będzie się znajdował na osi obrotu, czyli bryła będzie wyważona statycznie, wtedy $x'_C = y'_C = z'_C = 0$ i lewe strony trzech pierwszych równań (7.96) będą równe zeru, a tym samym znikną siły wywołane przez niewyważenie statyczne $W_{x'} = W_{y'} = W_{z'} = 0$. W tym przypadku z trzech ostatnich równań (7.96) wynika, że reakcje dynamiczne w łożyskach będą spowodowane przez moment \mathbf{M}_O związany z działaniem sił bezwładności. Ponieważ na podstawie warunku (I) moment ten jest prostopadły do osi obrotu, zatem reakcje dynamiczne w łożyskach będą tworzyć parę sił wirującą z prędkością równą prędkości kątowej ω . Mówimy wtedy, że bryła jest *niewyważona dynamicznie*.

Jeżeli oś obrotu będzie główną centralną osią bezwładności, np. oś z' pokryje się z osią z , to pozostałe osie x' i y' układu ruchomego będą do niej prostopadłe, czyli $\omega_{x'} = \omega_{y'} = 0$. Wynika z tego, że trzy pozostałe równania (7.96) znikają, a tym samym znikają reakcje dynamiczne w łożyskach. Na podstawie powyższych rozważań możemy sformułować następujący wniosek:

Jeżeli oś obrotu bryły jest główną centralną osią bezwładności, czyli bryła jest wyważona statycznie i dynamicznie, to reakcje dynamiczne są równe zeru.

Z przeprowadzonych w tym punkcie rozważań wynika, że ruch wirującej bryły wywołuje okresowo zmienne siły działające na łożyska, które przenosząc się na korpus maszyny, a dalej na fundament wywołują drgania. Drgania te powodują przyspieszone zużycie elementów maszyny, a także niekorzystnie wpływają na otoczenie. Aby temu zapobiec, wirujące części maszyn projektuje się tak, aby oś obrotu była główną centralną osią bezwładności. Jednak np. ze względu na błędy wykonawcze spełnienie tego warunku nie zawsze jest możliwe. Dlatego wirujące części maszyn są sprawdzane po wykonaniu i ewentualnie wyważane przez odpowiednią korektę masy.

Przykład 7.15. Cienka jednorodna płyta prostokątna o masie m i bokach h oraz b obraca się wokół przekątnej ze stałą prędkością kątową ω . Obliczyć reakcje dynamiczne łożysk A i B, jeżeli odległość między nimi wynosi L (rys. 7.28).



Rys. 7.28. Wyznaczenie reakcji dynamicznych łożysk

Rozwiązanie. Ponieważ środek ciężkości C płyty leży na osi obrotu, która nie jest główną centralną osią bezwładności, reakcje w łożyskach A i B będą spowodowane niewyważeniem dynamicznym. W środku ciężkości przyjmujemy ruchomy układ współrzędnych sztywno związany z płytą w ten sposób, że osie x' i z' są osiami symetrii płyty, a oś y' jest prostopadła do płaszczyzny rysunku. W tym układzie współrzędnych prędkość kątowa ω ma współrzędne:

$$\omega_{x'} = \omega \sin \alpha, \quad \omega_{y'} = 0, \quad \omega_{z'} = \omega \cos \alpha.$$

Po podstawieniu tych wzorów do trzech ostatnich równań (7.96) i po zastąpieniu punktu O punktem C otrzymujemy: $M_{Cx'} = 0, M_{Cz'} = 0$ oraz

$$M_{Cy'} = (I_{x'} - I_{z'}) \omega_{x'} \omega_{z'} = (I_{x'} - I_{z'}) \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha. \quad (a)$$

Momenty bezwładności prostokątnej płyty względem osi symetrii otrzymamy ze wzorów (d) wyprowadzonych w przykładzie 6.3:

$$I_{x'} = \frac{mh^2}{12}, \quad I_{z'} = \frac{mb^2}{12}. \quad (b)$$

Z rysunku wynika, że

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{h^2 + b^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + b^2}}. \quad (c)$$

Po podstawieniu oznaczeń (b) i (c) do wzoru (a) otrzymujemy:

$$M_{Cy'} = M_C = \frac{m (h^2 - b^2) bh}{12 (h^2 + b^2)} \omega^2. \quad (d)$$

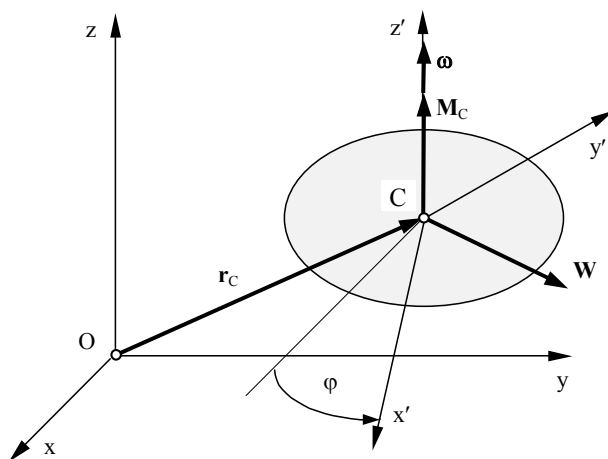
Z zależności (d) wynika, że wektor momentu M_C leży na osi y' , czyli jest prostopadły do płaszczyzny płyty i wiruje razem z nią. Moment ten jest wywołany przez parę sił (reakcji) R_A i R_B prostopadłych do osi obrotu. Wartości momentu i reakcji są równe:

$$M_C = R_A L = R_B L, \quad R_A = R_B = \frac{M_C}{L} = \frac{m (h^2 - b^2) bh}{12 (h^2 + b^2) L} \omega^2. \quad (e)$$

W czasie obrotu reakcje R_A i R_B wirują razem z płytą. Ponadto są one proporcjonalne do kwadratu prędkości kątowej i w przypadku zbyt szybko obracającej się bryły mogą osiągać duże wartości.

7.5.3. Ruch płaski bryły

W kinematyce ruchu bryły sztywnej ruchem płaskim nazwalimy ruch, w czasie którego wszystkie punkty bryły zakreślają tory równoległe do pewnej płaszczyzny nazywanej płaszczyzną ruchu lub płaszczyzną kierującą.



Rys. 7.29. Ruch płaski bryły sztywnej

Na rysunku 7.29 przedstawiono przekrój bryły płaszczyzną ruchu przechodzącą przez środek masy C. W dowolnym punkcie O przyjęto nieruchomy układ współrzędnych x, y, z tak, że osie x, y leżą w płaszczyźnie ruchu, a oś z jest do niej prostopadła. Ruchomy układ współrzędnych x', y', z' o początku w środku masy C przyjęto w ten sam sposób, czyli osie x', y' poruszają się w płaszczyźnie ruchu, a oś z' jest do niej prostopadła. Wynika z tego, że osie z i z' są do siebie równoległe.

W dalszych rozważaniach dynamiki ruchu płaskiego bryły przyjmujemy następujące założenia:

- oś z' jest główną centralną osią bezwładności,
- ruch bryły odbywa się pod wpływem sił działających w płaszczyźnie ruchu.

Bryła poruszająca się ruchem płaskim ma trzy stopnie swobody, a więc do jego opisu wystarczy podać trzy równania ruchu – dwóch współrzędnych środka masy x_C i y_C oraz kąta obrotu φ układu ruchomego względem nieruchomego. Kinematyczne równania ruchu płaskiego (5.51) i (5.52) możemy zapisać w postaci:

$$x_C = x_C(t), \quad y_C = y_C(t) \quad \text{oraz} \quad \varphi = \varphi(t). \quad (7.97)$$

Zatem do opisu dynamiki ruchu płaskiego bryły niezbędne są trzy dynamiczne równania ruchu. Do ich wyznaczenia wykorzystamy równania (7.93) opisujące ruch bryły swobodnej.

Z założenia b) na podstawie własności płaskiego układu sił (3.8) wynika, że wektor główny \mathbf{W} będzie leżał w płaszczyźnie sił, a moment główny \mathbf{M}_C będzie prostopadły do tej płaszczyzny. Możemy w tej sytuacji zapisać:

$$W_{z'} = 0 \quad \text{oraz} \quad M_{C_{x'}} = M_{C_{y'}} = 0 \quad . \quad (m)$$

Ponadto w ruchu płaskim bryły (p. 5.3.8) prędkość kątowna $\boldsymbol{\omega}$ jest prostopadła do płaszczyzny ruchu, czyli

$$\omega_{x'} = \omega_{y'} = 0 \quad . \quad (n)$$

Po uwzględnieniu zależności (m) i (n) równania (7.93) redukują się do trzech dynamicznych równań ruchu płaskiego bryły.

$$m a_{C_{x'}} = W_{x'}, m a_{C_{y'}} = W_{y'}, I_{z'} \varepsilon_{z'} = M_{C_{z'}} \quad . \quad (7.98)$$

Po wyrażeniu przyśpieszenia \mathbf{a}_C środka masy oraz wektora głównego \mathbf{W} w nieruchomym układzie współrzędnych x, y oraz uwzględnieniu, że $\varepsilon_{z'} = \varepsilon$ (wzór 5.63), równania (7.98) można zapisać następująco:

$$m a_{C_x} = W_x, \quad m a_{C_y} = W_y, \quad I_{z'} \varepsilon = M_{C_{z'}} \quad . \quad (7.99)$$

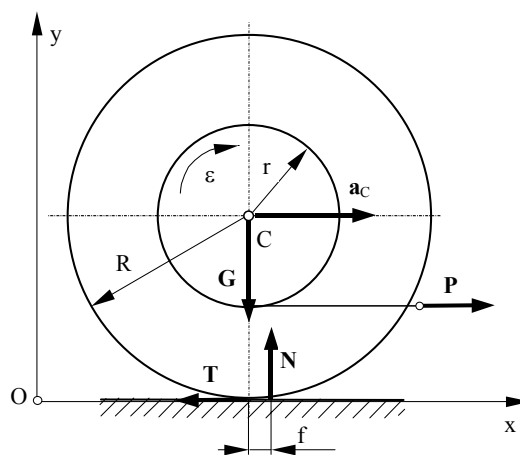
Ponieważ współrzędne przyśpieszenia środka masy C w nieruchomym układzie współrzędnych są równe drugim pochodnym względem czasu współrzędnych x_C i y_C , powyższym równaniom można nadać postać równań różniczkowych po uwzględnieniu drugiego wzoru (5.64):

$$m \frac{d^2 x_C}{dt^2} = W_x, \quad m \frac{d^2 y_C}{dt^2} = W_y, \quad I_{z'} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M_{C_{z'}} \quad . \quad (7.100)$$

Przykład 7.16. Na poziomym szorstkim stole znajduje się szpula, której środek masy C leży na osi symetrii obrotu. Szpula ma masę m oraz dwa promienie R i r . Rysunek 7.30 przedstawia szpulę w rzucie na płaszczyznę prostopadłą do osi symetrii. Moment bezwładności względem tej osi wynosi I_C . Z obwodu o promieniu r odwija się nić, do której końca przyłożono stałą siłę poziomą \mathbf{P} . Wyznaczyć maksymalną wartość siły $P = P_{\max}$, pod wpływem której szpula będzie się toczyć bez poślizgu, jeżeli współczynnik tarcia statycznego między szpulą a stołem jest równy μ , a współczynnik tarcia tocznego f .

Dla tego przypadku wyznaczyć przyśpieszenie osi szpuli \mathbf{a}_C .

Rozwiązanie. Na szpulę działają dwie siły obciążające: siła ciężaru szpuli G oraz siła P powodująca ruch szpuli. Reakcję stołu rozłożono na siłę tarcia T skierowaną w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu oraz reakcję normalną N przesuniętą w kierunku toczenia szpuli o wartość współczynnika tarcia tocznego f (rys. 3.11b). Rozważany ruch szpuli jest ruchem płaskim, zatem na podstawie wzoru (7.99) dynamiczne równania ruchu szpuli będą następujące :



Rys. 7.30. Ruch szpuli z uwzględnieniem oporu toczenia

$$\left. \begin{aligned} ma_C &= P - T, \\ 0 &= N - G, \\ I_C \varepsilon &= TR - Pr - Nf. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Jeżeli szpula toczy się bez poślizgu, to między przyśpieszeniem środka szpuli i przyśpieszeniem kątowym musi być spełniona następująca C zależność kinematyczna:

$$a_C = R\varepsilon. \quad (b)$$

Z drugiego z równań (a) wynika, że reakcja normalna jest równa ciężarowi szpuli:

$$N = G = mg, \quad (c)$$

gdzie g jest przyśpieszeniem ziemskim.

Maksymalną wartość siły P otrzymamy, założywszy, że siła tarcia T jest graniczną siłą tarcia o wartości (wzór 3.5):

$$T = \mu N = \mu mg. \quad (d)$$

Jeżeli do pierwszego i trzeciego równania (a) podstawimy wzory (c) i (d), a w trzecim uwzględnimy zależność (b), otrzymamy dwa równania:

$$\left. \begin{aligned} ma_c &= P - \mu mg, \\ I_c \frac{a_c}{R} &= \mu mgR - Pr - fmg. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

W równaniach tych mamy dwie niewiadome: a_c i $P = P_{\max}$. W celu wyeliminowania przyspieszenia a_c podzielimy równania stronami i otrzymamy:

$$\frac{mR}{I_c} = \frac{P - \mu mg}{\mu mgR - Pr - fmg}.$$

Stąd

$$P = P_{\max} = \frac{(\mu mR^2 - f mR + \mu I_c)mg}{I_c + mRr}. \quad (f)$$

Po podstawieniu tego wzoru do pierwszego równania (e) wyznaczmy przyspieszenie osi szpuli.

$$a_c = \frac{[\mu(R-r) - f]mgR}{I_c + mRr}. \quad (g)$$

Z otrzymanego wzoru wynika, że oś szpuli porusza się ze stałym przyspieszeniem, czyli ruchem jednostajnie przyspieszonym. Czytelnikowi pozostawiamy wyznaczenie równania ruchu $x_c = x_c(t) = ?$ dla warunków początkowych, np. dla $t=0$, $x_c = 0$ i $v_c = 0$.