2.1. Określenie i rodzaje wektorów. Mnożenie wektora przez skalar

Wielkości fizyczne występujące w mechanice i innych działach fizyki można podzielić na *skalary* i *wektory*. Aby określić wielkość skalarną, wystarczy podać tylko jedną liczbę. Wielkościami takimi są masa, czas, temperatura, objętość i inne. Do określenia wielkości wektorowej nie wystarcza podanie jednej liczby. Przykładem takiej wielkości jest siła. Aby ją określić, należy podać wartość, kierunek
w przestrzeni oraz zwrot. W ogólnym przypadku aby określić wektor, należy znać:

a) wartość bezwzględną wektora, zwaną modułem,
b) kierunek, czyli prostą, na której leży wektor (linię działania),
c) zwrot,
d) punkt przyłożenia.

Nie wszystkie wielkości wektorowe wymagają dla swego określenia podania wszystkich wymienionych cech. Z tego punktu widzenia rozróżniamy: *wektory zaczepione*, *wektory przesuwne* lub *ślizgające się* oraz *wektory swobodne*.

Wektory zaczepione wymagają do ich określenia podania wszystkich czterech cech. Wektorów takich nie można przemieszczać ani przesuwać.

Wektory przesuwne są określone za pomocą modułu, zwrotu oraz linii działania. Takie wektory mogą być jedynie przesuwane wzdłuż prostych, na których leżą.

Wektory swobodne są określone przez moduł, zwrot oraz kierunek równoległy do ich linii działania. Oznacza to, że wektor swobodny można dowolnie przemieszczać, równolegle do kierunku jego działania.

Graficznie wektory przedstawia się za pomocą odcinka skierowanego jak na rys. 2.1. Długość odcinka określa moduł wektora, kierunek – kierunek wektora (linię działania), a strzałka – zwrot wektora. Wektory będziemy oznaczać pogrubionymi literami – jedną literą albo dwoma, oznaczającymi początek i koniec wektora:

$$\mathbf{a} = \mathbf{AB}.$$

Moduł wektora będziemy oznaczać tak jak skalary albo za pomocą symbolu wartości bezwzględnej:

$$\mathrm{a} = |\mathbf{a}| = \mathrm{AB} = |\mathbf{AB}|.$$

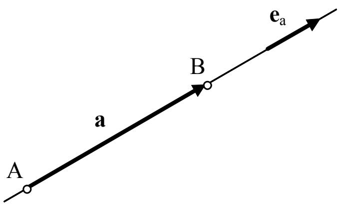
Moduł jest na ogół wielkością mianowaną i jego wartość liczbowa zależy od przyjętych jednostek fizycznych.

Dwa wektory swobodne przedstawiające tę samą wielkość wektorową są równe, jeżeli mają równe moduły, kierunki i zwroty. Aby dwa wektory przesuwne były równe, muszą ponadto leżeć na jednej prostej, a wektory zaczepione muszą być przyłożone w jednym punkcie. Równość wektorów **a** i **b** zapisujemy tak jak równość liczb, czyli

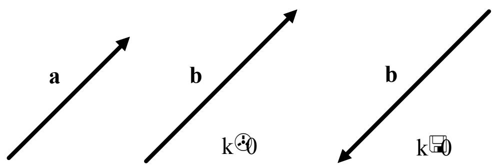
$$\mathbf{a} = \mathbf{b}.$$

W wyniku pomnożenia wektora **a** przez skalar k otrzymamy nowy wektor **b** równoległy do wektora **a** o module k razy większym od modułu wektora **a**. Zwrot wektora **b** będzie zależał od znaku skalara k. Jeżeli k > 0, to zwrot wektora **b** jest zgodny ze zwrotem wektora **a**, a przeciwny, gdy k < 0 (rys. 2.2). Wektor **b** będziemy zapisywać:

$$\mathbf{b} = \mathrm{k}\,\mathbf{a}. \tag{2.1}$$

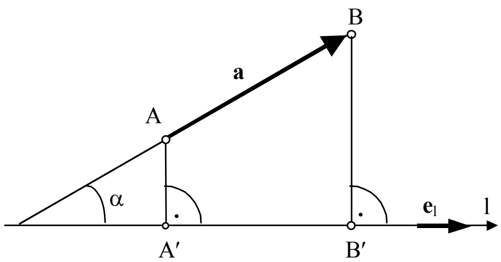


Rys. 2.1. Graficzne przedstawienie wektora



Rys. 2.2. Wektory równoległe

Rzutem wektora $\mathbf{a} = \mathbf{AB}$ na dowolną oś l nazywamy odcinek $A'B'$, którego początek i koniec są rzutami początku i końca wektora **a** na oś l (rys. 2.3).



Rys. 2.3. Rzut wektora na oś

Z rysunku 2.3 wynika, że rzut wektora **a** na oś l jest równy iloczynowi modułu wektora pomnożonemu przez kosinus kąta zawartego między kierunkiem wektora a osią.

$$A'B' = Rz_l(\mathbf{a}) = a\cos\alpha. \tag{2.2}$$

Łatwo spostrzec, że jeżeli zwrot wektora i zwrot osi są zgodne oraz kąt α jest ostry, to znak rzutu jest dodatni.

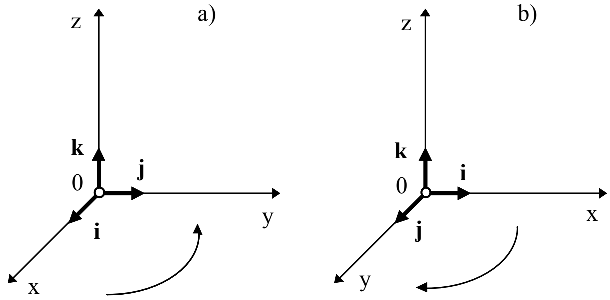
Często do określenia kierunku w przestrzeni używamy tzw. wektora jednostkowego, którego moduł jest równy jedności i jest liczbą bezwymiarową. Mając dowolny wektor, można utworzyć wektor jednostkowy o kierunku tego wektora przez podzielenie wektora przez jego moduł. Wektor jednostkowy będziemy oznaczać literą **e** z indeksem dolnym oznaczającym kierunek. Wektor jednostkowy o kierunku i zwrocie wektora **a**, pokazany na rys. 2.1, otrzymamy ze wzoru:

$$\mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}}{a}. \tag{2.3}$$

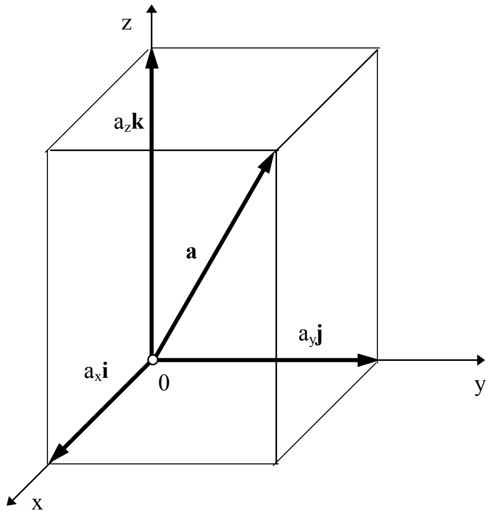
Po przekształceniu powyższego wzoru widzimy, że każdy wektor można zapisać w postaci iloczynu jego modułu i wektora jednostkowego:

$$\mathbf{a} = a\,\mathbf{e}_a. \tag{2.4}$$

W celu analitycznego przedstawiania wektorów należy wprowadzić odpowiedni układ współrzędnych. Najczęściej przyjmujemy kartezjański prostokątny układ współrzędnych o osiach x, y, z i wektorach jednostkowych **i**, **j**, **k** o kierunkach osi współrzędnych zwanych *wersorami*. W dalszym ciągu będziemy wyłącznie stosować prawoskrętne układy współrzędnych charakteryzujące się tym, że jeżeli obrócimy oś x w kierunku osi y, to oś z jest skierowana zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej (rys. 2.4a). Na rysunku 2.4b przedstawiono układ lewoskrętny.



Rys. 2.4. Prostokątne układy współrzędnych: a) prawoskrętny, b) lewoskrętny



Rys. 2.5. Składowe wektora w kartezjańskim układzie współrzędnych

W układzie współrzędnych prostokątnych o osiach x, y, z i wersorach odpowiednio **i**, **j**, **k** dowolny wektor **a** można rozłożyć na trzy składowe: $a_x\mathbf{i}$, $a_y\mathbf{j}$, $a_z\mathbf{k}$ o kierunkach osi układu współrzędnych (rys. 2.5). Wektor **a** możemy zapisać analitycznie w postaci sumy trzech wektorów składowych (por. p. 2.2):

$$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}. \tag{2.5}$$

W powyższym wzorze a_x, a_y, a_z są współrzędnymi wektora równymi

rzutom wektora **a** na osie układu współrzędnych x, y, z. Jeżeli wektor **a** tworzy z osiami x, y, z odpowiednio kąty α, β, γ, to jego współrzędne (rzuty) zgodnie ze wzorem (2.2) wyrazimy następująco:

$$a_x = a\cos\alpha, \quad a_y = a\cos\beta, \quad a_z = a\cos\gamma. \tag{2.6}$$

Gdy znane są współrzędne wektora, to jego moduł określa wzór:

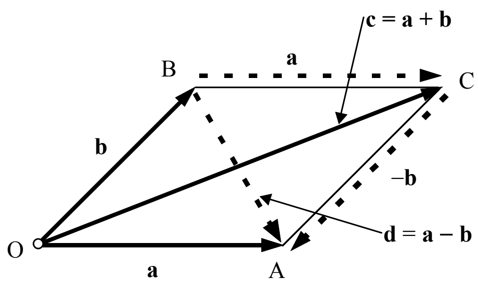
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \tag{2.7}$$

a kosinusy kątów, zwane *kosinusami kierunkowymi*, wyznaczonymi przez kierunki, jakie wektor **a** tworzy z osiami x, y, z, wyrażają zależności:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a}, \; \cos\beta = \frac{a_y}{a}, \; \cos\gamma = \frac{a_z}{a}. \tag{2.8}$$

2.2. Suma i różnica wektorów

Wektory swobodne można dodawać i odejmować geometrycznie (wykreślnie) oraz analitycznie. Dodawanie geometryczne dwóch wektorów **a** i **b** polega na



Rys. 2.6. Dodawanie i odejmowanie dwóch wektorów

zastosowaniu reguły równoległoboku. Wektory przenosimy równolegle tak, aby ich początki znalazły się w dowolnym punkcie O, i budujemy na tych wektorach równoległobok OACB pokazany na rys. 2.6. Sumą dodawanych wektorów **a** i **b** nazywamy wektor **c** równy przekątnej równoległoboku:

$$\mathbf{c} = \mathbf{OC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Różnicę dwóch wektorów **a** – **b** otrzymamy przez dodanie do wektora **a** wektora różniącego się od wektora **b** tylko zwrotem, czyli wektor przeciwny (– **b**):

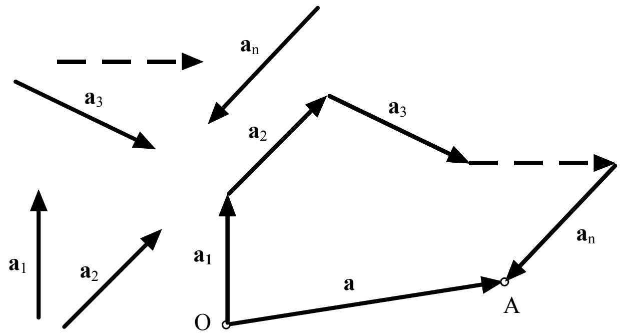
$$\mathbf{d} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} - \mathbf{b}.$$

Odejmowanie dwóch wektorów przedstawiono na rys. 2.6 linią przerywaną. Z rysunku wynika, że sumę dwóch wektorów przedstawia jedna przekątna, a różnicę druga.

Większą liczbę wektorów można sumować, stosując regułę równoległoboku do kolejnych wektorów. Jednak w tym przypadku wygodniej jest skorzystać z metody wieloboku wektorów.

Gdy mamy n wektorów $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, . . . , $\mathbf{a}_n$, to do końca pierwszego wektora przykładamy początek drugiego, a do końca drugiego początek trzeciego. Postępując w ten sposób z kolejnymi wektorami, otrzymujemy konstrukcję przedstawioną na rys. 2.7. Sumą n wektorów, zwaną sumą geometryczną, nazywamy wektor **a** łączący początek pierwszego wektora z końcem ostatniego:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}_k . \tag{2.9}$$



Rys. 2.7. Dodawanie n wektorów

Omówioną konstrukcję nazywamy wielobokiem wektorów. Jeżeli koniec ostatniego wektora pokrywa się z początkiem pierwszego, to suma wektorów jest równa zeru: $\mathbf{a} = 0$. Mówimy wtedy, że wielobok jest zamknięty. W przeciwnym razie, tj. gdy $\mathbf{a} \bullet\; 0$, wielobok jest otwarty.

Czytelnikowi pozostawiamy wykazanie, że do dodawania wektorów stosuje się prawo przemienności:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

oraz łączności

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Aby analitycznie dodać n wektorów, musimy je wyrazić za pomocą współrzędnych z przyjętego układu współrzędnych:

$$\mathbf{a}_k = a_{kx}\mathbf{i} + a_{ky}\mathbf{j} + a_{kz}\mathbf{k} \qquad (k = 1, 2, \ldots n).$$

Po podstawieniu tego wzoru do równania (2.9) otrzymamy:

$$\mathbf{a} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}_k = \sum_{k=1}^{n} \left(a_{kx}\,\mathbf{i} + a_{ky}\,\mathbf{j} + a_{kz}\,\mathbf{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{kx}\,\mathbf{i} + \sum_{k=1}^{n} a_{ky}\,\mathbf{j} + \sum_{k=1}^{n} a_{kz}\,\mathbf{k}.$$

Po oznaczeniu w tym równaniu współrzędnych wektora **a** przez a_x, a_y, a_z mamy:

$$a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k} = \sum_{k=1}^{n} a_{kx}\,\mathbf{i} + \sum_{k=1}^{n} a_{ky}\,\mathbf{j} + \sum_{k=1}^{n} a_{kz}\,\mathbf{k}.$$

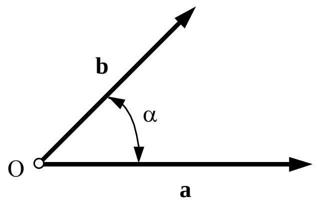
Z obustronnego porównania wyrazów występujących przy odpowiednich wersorach otrzymujemy wzory na współrzędne wektora będącego sumą wektorów:

$$a_x = \sum_{k=1}^{n} a_{kx},\; a_y = \sum_{k=1}^{n} a_{ky},\; a_z = \sum_{k=1}^{n} a_{kz}. \tag{2.10}$$

Otrzymane wyniki są zgodne z treścią znanego twierdzenia Charles'a, że rzut sumy wektorów na dowolną oś jest równy sumie rzutów poszczególnych wektorów na tę oś.

2.3.1. Iloczyn skalarny

Iloczynem skalarnym (skalarowym) dwóch wektorów **a** *i* **b** *nazywamy skalar równy iloczynowi modułów obu wektorów przez kosinus kąta zawartego między nimi.*·



Rys. 2.8. Ilustracja do definicji iloczynu skalarnego

Jeżeli kąt między wektorami oznaczymy przez α (rys. 2.8), a operację mnożenia skalarnego przez **a·b**, to otrzymamy:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\alpha. \tag{2.11}$$

Po uwzględnieniu we wzorze (2.11) zależności (2.2) iloczyn skalarny możemy przedstawić jako iloczyn rzutu jednego wektora na kierunek drugiego i modułu drugiego.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a\left(b\cos\alpha\right) = b\left(a\cos\alpha\right) = a\,Rz_a\left(b\right) = bRz_b\left(a\right). \tag{2.12}$$

Iloczyn skalarny jest równy zeru (poza przypadkami, gdy **a** = 0 lub **b** = 0), gdy $\cos\alpha = 0$. Wynika stąd *warunek prostopadłości* (ortogonalności) dwóch wektorów:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0, \qquad \text{gdy} \qquad \mathbf{a}\perp\mathbf{b}. \tag{2.13}$$

Z faktu, że funkcja kosinus jest funkcją parzystą [$\cos\alpha = \cos(-\alpha)$], wynika, że do iloczynu skalarnego stosuje się prawo przemienności:

$$a\cdot b = b\cdot a\,.$$

Iloczyn skalarny podlega również prawu rozdzielności mnożenia skalarnego względem dodawania:

$$\mathbf{a}\cdot\left(\mathbf{b}+\mathbf{c}\right) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}.$$

Dowód tej własności wynika bezpośrednio z przytoczonego w poprzednim punkcie twierdzenia Charles'a oraz z zależności (2.2):

$$\mathrm{a}\cdot(\mathrm{b}+\mathrm{c}) = aRz_a(\mathrm{b}+\mathrm{c}) = a[Rz_a(\mathrm{b}) + Rz_a(\mathrm{c})] =$$
$$= aRz_a(\mathrm{b}) + aRz_a(\mathrm{c}) = \mathrm{a}\cdot\mathrm{b} + \mathrm{a}\cdot\mathrm{c}.$$

Jeżeli pomnożymy równanie (2.11) przez dowolny skalar k, to otrzymamy prawo łączności mnożenia iloczynu skalarnego przez skalar:

$$\mathrm{k}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\mathrm{ka})\mathrm{b}\cos\alpha = \mathrm{a}(\mathrm{kb})\cos\alpha = (\mathrm{k}\,\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot(\mathrm{k}\,\mathbf{b}).$$

Wektor pomnożony skalarnie przez siebie jest równy kwadratowi modułu:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathrm{a}\,\mathrm{a}\cos 0 = \mathrm{a}^2. \tag{2.14}$$

Z podanych wyżej rozważań wynika, że iloczyn skalarny – poza wzorem (2.13) – ma takie same własności jak iloczyn algebraiczny liczb.

Gdy mamy dowolny wektor **a** oraz oś l określoną przez wektor jednostkowy $\mathbf{e}_l$ (rys. 2.3), to na podstawie równania (2.12) rzut tego wektora na oś l wyraża wzór:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_l = \mathrm{a}\cos\alpha = \mathrm{Rz}_l(\mathbf{a}). \tag{2.15}$$

Z zależności tej będziemy często korzystać przy obliczaniu współrzędnych wektora w danym układzie współrzędnych.

Obecnie podamy zależności między wersorami **i**, **j**, **k** prostokątnego układu współrzędnych. Na podstawie wzorów (2.14) i (2.13) otrzymujemy:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1, \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

Gdy wektory **a** i **b** zapiszemy analitycznie za pomocą ich współrzędnych w prostokątnym układzie współrzędnych x, y, z:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a} = \mathrm{a_x}\,\mathbf{i} + \mathrm{a_y}\,\mathbf{j} + \mathrm{a_z}\,\mathbf{k}, \\ \mathbf{b} = \mathrm{b_x}\,\mathbf{i} + \mathrm{b_y}\,\mathbf{j} + \mathrm{b_z}\,\mathbf{k}, \end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

to ich iloczyn skalarny na podstawie wzorów (2.16) można wyrazić przez współrzędne:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathrm{a_x b_x} + \mathrm{a_y b_y} + \mathrm{a_z b_z}. \tag{2.18}$$

Porównanie wzorów (2.11) i (2.18) pozwala obliczyć kąt między wektorami:

$$\cos\alpha = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab}. \tag{2.19}$$

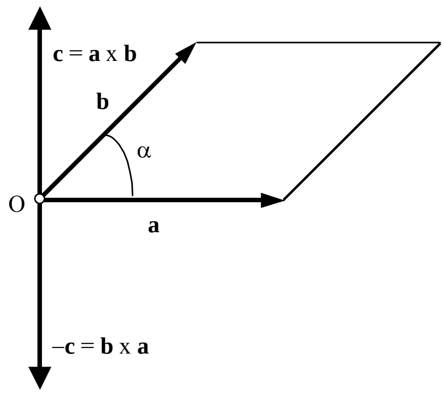
Z tego wzoru wynika, że aby dwa wektory były ortogonalne, ich współrzędne muszą spełniać zależność:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \tag{2.20}$$

2.3.2. Iloczyn wektorowy

Iloczynem wektorowym $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *dwóch wektorów* **a** i **b** *nazywamy wektor* **c** *prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez te wektory, którego moduł jest równy iloczynowi modułów tych wektorów pomnożonemu przez sinus kąta zawartego między nimi* (rys. 2.9)

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{c} &= \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \\ c &= ab\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (2.21)$$



Rys. 2.9. Ilustracja iloczynu wektorowego

Zwrot wektora **c** jest tak dobrany, że wektory **a**, **b**, **c** tworzą układ prawoskrętny, czyli zwrot wektora **c** określa reguła śruby prawoskrętnej.

Z określenia modułu iloczynu wektorowego oraz z rys. 2.9 wynika, że jest on równy polu równoległoboku zbudowanego na wektorach **a** i **b**.

Z definicji iloczynu wektorowego wynika, że poza przypadkami, gdy

$\mathbf{a} = 0$ lub $\mathbf{b} = 0$, jest on równy zeru,

kiedy $\sin\alpha = 0$, czyli dla $\alpha = 0$ albo $\alpha = \pi$, co oznacza, iż wektor **a** jest równoległy do wektora **b**. Zatem *warunek równoległości* ma postać:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0. \qquad (2.22)$$

Jeżeli w iloczynie wektorowym wektory **a** i **b** zamienimy miejscami, to wektory **b**, **a**, **c** będą tworzyły układ lewoskrętny. Aby ponownie otrzymać układ prawoskrętny, należy zmienić zwrot wektora **c** na przeciwny, jak na rys. 2.9, czyli gdy

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}, \quad \text{to} \quad \mathbf{b}\times\mathbf{a}=-\mathbf{c}.$$

Widzimy zatem, że do iloczynu wektorowego nie stosuje się prawo przemienności:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}. \tag{2.23}$$

Można wykazać [6, 9], że iloczyn wektorowy podlega prawu rozdzielności mnożenia wektorowego względem dodawania:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{d})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{d}. \tag{2.24}$$

Do iloczynu wektorowego stosuje się również prawo łączności mnożenia przez dowolny skalar k:

$$(\mathrm{k}\,\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times(\mathrm{k}\,\mathbf{b})=\mathrm{k}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}). \tag{2.25}$$

Powyższa równość wynika bezpośrednio z porównania modułów powyższych iloczynów wektorowych.

Iloczyny wektorowe wersorów **i**, **j**, **k** prostokątnego prawoskrętnego układu współrzędnych x, y, z wynikają bezpośrednio ze wzoru (2.22) oraz z definicji iloczynu wektorowego

$$\left.\begin{array}{lll} \mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0, & & \\ \mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}, & \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}, & \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}, \\ \mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k}, & \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}, & \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}. \end{array}\right\} \tag{2.26}$$

Obecnie wyrazimy iloczyn wektorowy dwóch dowolnych wektorów **a** i **b** za pomocą ich współrzędnych w prostokątnym układzie współrzędnych x, y, z. Po podstawieniu zależności (2.17) do wzoru na iloczyn wektorowy mamy:

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(\mathrm{a_x}\,\mathbf{i}+\mathrm{a_y}\,\mathbf{j}+\mathrm{a_z}\,\mathbf{k})\times(\mathrm{b_x}\,\mathbf{i}+\mathrm{b_y}\,\mathbf{j}+\mathrm{b_z}\,\mathbf{k}).$$

Po wykonaniu działań, wykorzystaniu zależności (2.26) oraz pogrupowaniu wyrazów przy poszczególnych wersorach powyższy wzór przyjmie postać:

$$\mathbf{c}=(\mathrm{a_y b_z}-\mathrm{a_z b_y})\mathbf{i}+(\mathrm{a_z b_x}-\mathrm{a_x b_z})\mathbf{j}+(\mathrm{a_x b_y}-\mathrm{a_y b_x})\mathbf{k}. \tag{2.27}$$

Wyrażenie po prawej stronie tego równania jest rozwinięciem wyznacznika

$$\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{2.28}$$

W celu obliczenia współrzędnych c_x, c_y, c_z iloczynu wektorowego należy wektor **c** zapisany analitycznie: $\mathbf{c} = c_x\,\mathbf{i} + c_y\,\mathbf{j} + c_z\,\mathbf{k}$ podstawić do równania (2.27). Z porównania wyrazów przy tych samych wersorach otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned} c_x &= \left(a_y b_z - a_z b_y\right), \\ c_y &= \left(a_z b_x - a_x b_z\right), \\ c_z &= \left(a_x b_y - a_y b_x\right). \end{aligned}\right\} \tag{2.29}$$

2.3.3. Iloczyny złożone trzech wektorów

W poprzednich dwóch punktach omówiliśmy iloczyn skalarny oraz iloczyn wektorowy dwóch wektorów. Wektory te mogły być w szczególności sumą kilku wektorów. Obecnie podamy określenia iloczynów podwójnych złożonych z trzech wektorów. Będzie to *iloczyn mieszany* trzech wektorów oraz *podwójny iloczyn wektorowy* trzech wektorów. Ograniczymy się przy tym tylko do określenia tych iloczynów oraz podania podstawowych zależności niezbędnych do przekształceń wzorów wektorowych w dalszych rozdziałach. Dowody na podane niżej przekształcenia można znaleźć w literaturze [6, 9, 11].

Iloczynem mieszanym trzech wektorów **a**, **b** i **c** nazywamy iloczyn skalarny jednego z tych wektorów, np. wektora **a**, przez wektor będący iloczynem wektorowym dwóch pozostałych:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}). \tag{2.30}$$

Z podanej definicji wynika, że iloczyn mieszany jest skalarem.

W interpretacji geometrycznej iloczyn mieszany jest równy liczbowo objętości równoległościanu zbudowanego na wektorach **a**, **b** i **c**. Z podanej interpretacji geometrycznej wynika, że gdy wektory te leżą w jednej płaszczyźnie, to iloczyn mieszany jest równy zeru.

Wartość iloczynu mieszanego nie ulega zmianie, jeżeli w iloczynie tym będziemy zmieniać cyklicznie kolejność wyrazów:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}). \tag{2.31}$$

Jeżeli wektory występujące w iloczynie mieszanym przedstawimy analitycznie:

$$\mathbf{a}=a_x\,\mathbf{i}+a_y\,\mathbf{j}+a_z\,\mathbf{k},$$
$$\mathbf{b}=b_x\,\mathbf{i}+b_y\,\mathbf{j}+b_z\,\mathbf{k},$$
$$\mathbf{c}=c_x\,\mathbf{i}+c_y\,\mathbf{j}+c_z\,\mathbf{k},$$

to iloczyn mieszany można zapisać w postaci wyznacznika utworzonego ze współrzędnych wektorów:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{2.32}$$

Podwójny iloczyn wektorowy trzech wektorów **a**, **b** i **c** jest wektorem powstałym w wyniku wektorowego pomnożenia wektora **a** przez iloczyn wektorowy wektora **b** i **c**:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}). \tag{2.33}$$

Powyższy wzór można rozwinąć do postaci bardziej przydatnej do przekształceń wzorów wektorowych:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}). \tag{2.34}$$

2.4. Moment wektora względem punktu

Momentem wektora **a** *względem punktu* (bieguna) O nazywamy iloczyn wektorowy wektora $\mathbf{r}_A$ = **OA** o początku w punkcie O i końcu w początku wektora **a** przez wektor **a** (rys. 2.10). Moment wektora względem punktu będziemy oznaczać w następujący sposób:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{a}) = \mathbf{r}_A \times \mathbf{a}. \tag{2.35}$$

Z podanej definicji wynika, że moment wektora względem punktu ma własności wynikające z omówionego w p. 2.3.2 iloczynu wektorowego. Zatem wektor $\mathbf{M}_O(\mathbf{a})$ jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny określonej przez wektory $\mathbf{r}_A$ i **a** i ma zwrot zgodny z regułą śruby prawoskrętnej. Albo inaczej, jego zwrot jego jest taki, że dla obserwatora patrzącego z końca wektora momentu wektor **a** wywołuje obrót wokół bieguna O w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

Moment wektora względem punktu jest równy zeru, gdy wektor **a** = 0 lub wektory $\mathbf{r}_A$ i **a** są równoległe, albo linia działania wektora **a** przechodzi przez punkt O.

Obecnie zastanówmy się, jak zmieni się moment wektora względem punktu, gdy wektor **a** przesuniemy wzdłuż linii jego działania. W tym celu obliczmy moment wektora $\mathbf{a}'$ przyłożonego w punkcie A', różniącego się od wektora **a** tylko punktem przyłożenia, względem punktu O (rys. 2.10). Z definicji momentu wektora względem punktu mamy:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{a}') = \mathbf{r}_{A'} \times \mathbf{a}'.$$

Na podstawie rys. 2.10 możemy napisać:

$$\mathbf{r}_{A'} = \mathbf{r}_A + \mathbf{AA}'.$$

Po podstawieniu tej zależności do wzoru na moment wektora względem punktu otrzymamy:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{a}') = (\mathbf{r}_A + \mathbf{AA}') \times \mathbf{a}' = \mathbf{r}_A \times \mathbf{a} + \mathbf{AA}' \times \mathbf{a}'.$$

Ponieważ $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$, a iloczyn wektorowy dwóch wektorów leżących na jednej prostej jest równy zeru:

$$\mathbf{AA}' \times \mathbf{a} = 0,$$

otrzymujemy:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{a}') = \mathbf{r}_A \times \mathbf{a} = \mathbf{M}_O(\mathbf{a}).$$

Z otrzymanej zależności wynika, że moment wektora **a** względem punktu O nie ulegnie zmianie, gdy wektor przesuniemy wzdłuż linii jego działania, czyli jest on wektorem przesuwnym. Wartość momentu $\mathbf{M}_O(\mathbf{a})$ będzie zależała od położenia linii działania wektora, jego modułu oraz punktu, względem którego liczymy moment.

Odległość punktu O od linii działania wektora **a**, oznaczonej na rys. 2.10 przez h, będziemy nazywać ramieniem wektora.

Gdy wektor **a** przesuniemy do punktu A'' (rys. 2.10), to moment tego wektora:

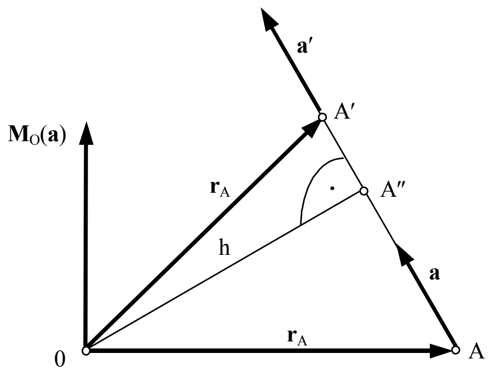
$$\mathbf{M}_O(\mathbf{a}) = \mathbf{OA}'' \times \mathbf{a}.$$

Z tego wzoru wynika, że moduł momentu jest równy iloczynowi modułu wektora przez jego ramię:

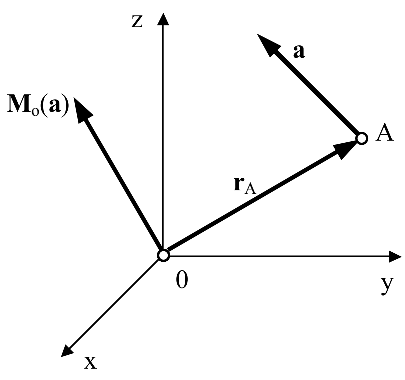
$$M_O(\mathbf{a}) = |\mathbf{M}_O(\mathbf{a})| = a\,h. \tag{2.36}$$

Moment wektora względem punktu można wyrazić za pomocą współrzędnych wektora **a** danych w prostokątnym układzie współrzędnych (rys. 2.11). Jeżeli wektory $\mathbf{r}_A$ i **a** zapiszemy za pomocą ich współrzędnych:

$$\mathbf{r}_A = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k},$$



Rys. 2.10. Moment wektora względem punktu



Rys. 2. 11. Moment wektora względem początku układu współrzędnych

to moment wektora **a** względem początku układu współrzędnych O na podstawie wzorów (2.28) i (2.27) wyraża zależność:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{a}) = \mathbf{r}_A \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

$$= (ya_z - za_y)\mathbf{i} + (za_x - xa_z)\mathbf{j} + (xa_y - ya_x)\mathbf{k}. \qquad (2.37)$$

Po zapisaniu momentu w postaci:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{a}) = M_{Ox}\,\mathbf{i} + M_{Oy}\,\mathbf{j} + M_{Oz}\,\mathbf{k}$$

i podstawieniu do wzoru (2.37) otrzymamy wzory na współrzędne wektora $\mathbf{M}_O(\mathbf{a})$:

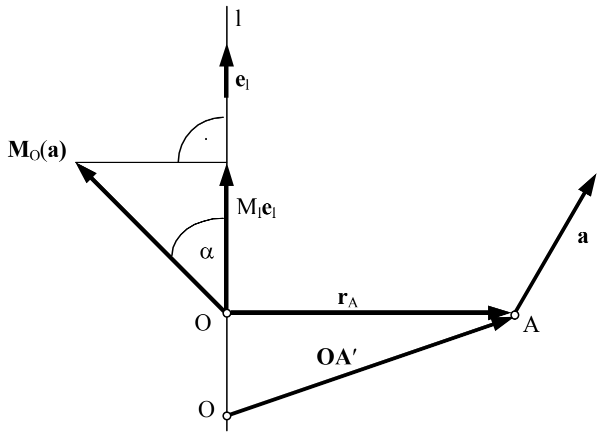
$$\left.\begin{aligned} M_{Ox} &= ya_z - za_y, \\ M_{Oy} &= za_x - xa_z, \\ M_{Oz} &= xa_y - ya_x. \end{aligned}\right\} \qquad (2.38)$$

2.5. Moment wektora względem osi

Zajmiemy się obecnie zdefiniowaniem wielkości będącej miarą działania obrotowego wektora względem osi. Wielkość tę nazywamy *momentem wektora względem osi*. W tym celu przyjmiemy, że dany jest dowolny wektor **a** oraz oś l, której kierunek jest określony przez wektor jednostkowy $\mathbf{e}_l$ (rys. 2.12).

Momentem wektora **a** *względem osi* l *nazywamy rzut na tę oś momentu tego wektora względem dowolnego punktu* O *tej osi:*

$$M_l = M_l(\mathbf{a}) = Rz_l[\mathbf{M}_O(\mathbf{a})] = M_O(\mathbf{a})\cos\alpha. \tag{2.39}$$



Rys. 2.12. Moment wektora względem osi

Na podstawie wzoru (2.15) moment wektora względem osi możemy przedstawić w postaci iloczynu skalarnego momentu wektora względem punktu i wersora osi:

$$M_l = \mathbf{M}_O(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_l.$$

Ponieważ moment wektora względem punktu jest równy iloczynowi wektorowemu:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{a}) = \mathbf{r}_A \times \mathbf{a},$$

moment wektora względem osi można zapisać w postaci iloczynu mieszanego:

$$M_l = (\mathbf{r}_A \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_l. \tag{2.40}$$

Tak zdefiniowany moment wektora względem osi jest skalarem. Definicja ta jest wystarczająca, ponieważ wektor $M_l(\mathbf{a})\mathbf{e}_l$ jest skierowany wzdłuż osi l, przeto do jego opisu wystarczy podanie tylko jego wartości.

Aby podana na wstępie definicja momentu względem osi była jednoznaczna, należy wykazać, że rzut na oś l momentu wektora **a** względem punktu O leżącego na tej osi nie zależy od położenia punktu O na tej osi. W tym celu obliczymy moment wektora **a** względem innego punktu O' leżącego na osi l (rys. 2.12) i dokonamy jego rzutu na tę oś:

$$\mathrm{Rz}_l\left[\mathbf{M}_{O'}(\mathbf{a})\right] = \mathbf{M}_{O'}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_l . \tag{a}$$

Na podstawie rys. 2.12 wektor $\mathbf{O'A}$ możemy przedstawić jako sumę wektora $\mathbf{O'O}$ i $\mathbf{r}_A$:

$$\mathbf{O'A} = \mathbf{O'O} + \mathbf{r_A} .$$

Po podstawieniu tej zależności do wzoru (a) oraz skorzystaniu z własności iloczynu mieszanego otrzymamy:

$$\mathrm{Rz}_l\left[\mathbf{M}_{O'}(\mathbf{a})\right] = \left[(\mathbf{O'O} + \mathbf{r_A}) \times \mathbf{a}\right] \cdot \mathbf{e}_l = (\mathbf{O'O} \times \mathbf{a} + \mathbf{r_A} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_l =$$
$$= (\mathbf{O'O} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_l + (\mathbf{r}_A \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_l = (\mathbf{e}_l \times \mathbf{O'O}) \cdot \mathbf{a} + (\mathbf{r}_A \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_l .$$

Ponieważ wektory $\mathbf{e}_l$ i $\mathbf{O'O}$ są równoległe, ich iloczyn wektorowy jest równy zeru: $\mathbf{e}_l \times \mathbf{O'O} = 0$, ostatecznie otrzymujemy:

$$\mathrm{Rz}_l\left[\mathbf{M}_{O'}(\mathbf{a})\right] = (\mathbf{r}_A \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_l = \mathrm{Rz}_l\left[\mathbf{M}_O(\mathbf{a})\right],$$

czyli rzut na oś momentu wektora względem punktu na osi nie zależy od położenia punktu na osi.

Z definicji momentu względem osi wynika, że będzie on równy zeru, jeżeli moment $\mathbf{M}_O(\mathbf{a})$ będzie równy zeru lub jego rzut na oś będzie równy zeru. Będzie tak, gdy kierunek wektora **a** będzie przecinał oś l lub będzie do niej równoległy.

Z określenia momentu wektora względem osi możemy zauważyć, że rzuty momentu $\mathbf{M}_O(\mathbf{a})$ wektora **a** względem początku układu współrzędnych O (rys. 2.11) na osie prostokątnego układu współrzędnych są równocześnie momentami tego wektora względem osi x, y, z. Na podstawie wzorów (2.38) momenty wektora **a** względem osi x, y, z będą opisane równaniami:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= M_{Ox} = ya_z - za_y, \\ M_y &= M_{Oy} = za_x - xa_z, \\ M_z &= M_{Oz} = xa_y - ya_x. \end{aligned}\right\} \qquad (2.41)$$

W oparciu o powyższe wzory można podać drugi sposób obliczania momentu wektora względem osi. Na przykład z pierwszego wzoru wynika, że aby obliczyć moment względem osi x, należy wektor **a** zrzutować na płaszczyznę yz, czyli płaszczyznę prostopadłą do osi x, i obliczyć moment wektora, będącego rzutem wektora na tę płaszczyznę, względem punktu O, czyli punktu przebicia płaszczyzny yz przez oś x. Wartość tak obliczonego momentu jest momentem wektora względem osi. Podobne wnioski wynikają z dwóch pozostałych wzorów (2.41). Na podstawie powyższego można podać drugą definicję momentu wektora względem osi.

Momentem wektora **a** *względem* osi *l nazywamy moduł momentu wektora równego rzutowi wektora* **a** *na płaszczyznę prostopadłą do osi l względem punktu przebicia płaszczyzny przez tę oś.*

Przykład 2.1. Dany jest wektor: $\mathbf{a} = -2\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j} - 10\,\mathbf{k}$, zaczepiony w punkcie A o współrzędnych x = 2, y = 3, z = 5. Obliczyć momenty tego wektora względem każdej osi układu współrzędnych.

Rozwiązanie. Zgodnie z podaną na wstępie definicją momentu wektora względem osi obliczymy najpierw moment wektora względem początku O układu współrzędnych. Współrzędne tego momentu będą – na podstawie wzorów (2.41) – szukanymi momentami wektora **a** względem osi x, y, z. Ponieważ

$$\mathbf{OA} = \mathbf{r}_A = 2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k},$$

na podstawie wzoru (2.37) otrzymujemy:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 5 & -10 \end{vmatrix} = -55\,\mathbf{i} + 10\,\mathbf{j} + 16\,\mathbf{k}.$$

Momenty wektora **a** względem osi układu współrzędnych są więc następujące:

$$M_x = M_{Ox} = -55, \quad M_y = M_{Oy} = 10, \quad M_z = M_{Oz} = 16.$$

Przykład ten można rozwiązać z wykorzystaniem drugiej definicji momentu wektora względem punktu, podanej wyżej. Czytelnikowi pozostawiamy rozwiązanie przykładu tą metodą.

2.6. Funkcje wektorowe

Z kursu matematyki znane są określenia funkcji zmiennych niezależnych oraz zmiennych zależnych. Jeżeli znamy kształt funkcji zmiennej zależnej f = f(u, v, t), to znając wartości liczbowe zmiennych niezależnych u, v, t, możemy wyznaczyć wartość zmiennej zależnej f.

W analizie wektorowej spotykamy się z funkcjami, w których zmiennymi niezależnymi i zmiennymi zależnymi mogą być zarówno skalary, jak i wektory.

Jeżeli każdemu punktowi pewnego obszaru przyporządkujemy pewną wartość liczbową, to ten obszar nazywamy **polem skalarnym**. Analogicznie, jeżeli każdemu punktowi pewnego obszaru przyporządkujemy pewien wektor, to ten obszar nazywamy **polem wektorowym**.

Najczęściej spotykamy się z trzema typami funkcji.

a) *Skalar jako funkcja położenia*. Po przyporządkowaniu każdemu punktowi obszaru funkcji typu

$$\varphi = \varphi(\mathbf{r}) \tag{2.42}$$

będziemy mówić o polu skalarnym. Zmienną zależną jest tutaj skalar ★, a zmienną niezależną wektor **r**. Przykładami pola skalarnego są: rozkład temperatury w dowolnym ośrodku, rozkład ciśnienia hydrostatycznego w nieruchomej cieczy lub potencjał pola elektrycznego.

b) *Wektor jako funkcja położenia*. W tym przypadku zarówno zmienna zależna **u**, jak i zmienna niezależna **r** są wektorami. Funkcję

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}) \tag{2.43}$$

nazywamy polem wektorowym. Przykładami takiego pola są: pole przyśpieszeń ziemskich, natężenie pola elektrostatycznego, rozkład prędkości w cieczy.

c) *Wektor jako funkcja skalara*. Funkcję taką możemy zapisać w następujący sposób:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s). \tag{2.44}$$

Zmienna zależna **r** jest tutaj wektorem, a zmienna niezależna s skalarem. Jeżeli wektor jest funkcją wielkości skalarnej, to jego współrzędne x, y, z w prostokątnym układzie współrzędnych będą również funkcjami tego skalara:

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}. \tag{2.44a}$$

Zatem każdą funkcję można zapisać w postaci trzech funkcji skalarnych.

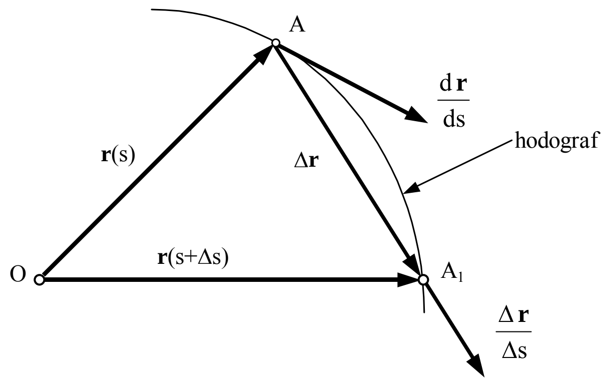
$$x = x(s),\ y = y(s), \quad z = z(s). \tag{2.45}$$

Gdy za zmienną niezależną przyjmiemy czas t, to przykładami takich funkcji wektorowych będą: położenie **r**(t), prędkość **v**(t) i przyśpieszenie poruszającego się punktu **a**(t).

2.7. Pochodna funkcji wektorowej

Załóżmy, że mamy funkcję wektorową typu (2.44), w której zmienną niezależną jest skalar. Przyrostowi zmiennej niezależnej s będzie towarzyszyć zmiana wektora **r**(s). Jeżeli początki wszystkich wektorów **r**(s) przyłożymy w jednym punkcie O, to ze zmianą zmiennej niezależnej s koniec tego wektora zakreśli w przestrzeni pewną linię nazywaną *hodografem* funkcji wektorowej **r**(s) (rys. 2.13). Niech wartościom s i s + *s odpowiadają wektory **r**(s) i **r**(s + *s), a wektor ***r** jest przyrostem wektora **r**(s) łączącym końce obu wektorów. Wówczas *pochodną funkcji wektorowej względem zmiennej niezależnej nazywamy granicę stosunku przyrostu tej funkcji do przyrostu zmiennej niezależnej, gdy przyrost zmiennej niezależnej dąży do zera:*

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{\mathbf{r}(s + \Delta s) - \mathbf{r}(s)}{\Delta s}. \tag{2.46}$$



Rys. 2.13. Ilustracja pchodnej funkcji wektorowej

Iloraz Δ**r**/Δs jest wektorem o zwrocie i kierunku wektora Δ**r**, czyli ma kierunek cięciwy. Gdy Δs dąży do zera, to cięciwa przechodzi w styczną. Zatem pochodna wektora jest wektorem stycznym do hodografu.

Z przedstawionego określenia pochodnej funkcji wektorowej wynika, że z formalnego punktu widzenia jest ona zdefiniowana podobnie do pochodnej funkcji skalarnej. Wynika z tego, że do pochodnych sum i iloczynów dwóch wektorów można stosować wzory wyprowadzone w analizie funkcji skalarnych. Dla dwóch funkcji wektorowych **a**(s) i **b**(s) słuszne są następujące zależności:

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{ds} \pm \frac{d\mathbf{b}}{ds}, \tag{2.47}$$

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{ds}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{b}}{ds}, \tag{2.48}$$

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{ds}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\frac{d\mathbf{b}}{ds}. \tag{2.49}$$

W ostatnim wzorze nie wolno zmieniać kolejności mnożenia, ponieważ iloczyn wektorowy jest nieprzemienny.

Gdy k(s) jest funkcją skalarną, to pochodna iloczynu tej funkcji przez wektor

$$\frac{d}{ds}(k\,\mathbf{a}) = \frac{dk}{ds}\mathbf{a} + k\frac{d\mathbf{a}}{ds}. \tag{2.50}$$

Jeżeli zmienna niezależna s jest funkcją innego parametru s(l), to pochodną wektora obliczamy podobnie do pochodnej skalarnej funkcji złożonej:

$$\frac{d\mathbf{a}[s(l)]}{dl} = \frac{d\mathbf{a}}{ds}\frac{ds}{dl}. \tag{2.51}$$

Mamy również:

$$\frac{d\mathbf{a}}{ds} = 0, \quad \text{gdy} \quad \mathbf{a} = \text{const}. \tag{2.52}$$

Gdy funkcja wektorowa jest zapisana analitycznie w prostokątnym nieruchomym układzie współrzędnych x, y, z w postaci (2.44a), wtedy jej pochodną po wykorzystaniu wzorów na różniczkowanie sumy (2.47) i iloczynu funkcji (2.50) wyraża wzór:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k} + x\frac{d\mathbf{i}}{ds} + y\frac{d\mathbf{j}}{ds} + z\frac{d\mathbf{k}}{ds}.$$

Ponieważ wersory osi nieruchomego układu współrzędnych są wektorami stałymi, mamy:

$$\frac{d\mathbf{i}}{ds} = \frac{d\mathbf{j}}{ds} = \frac{d\mathbf{k}}{ds} = 0,$$

a stąd ostatecznie

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}. \tag{2.52}$$

Z powyższego wynika, że współrzędne pochodnej wektora są równe pochodnym odpowiednich współrzędnych tego wektora.

Pochodne wyższych rzędów funkcji wektorowych obliczamy analogicznie do funkcji skalarnych.