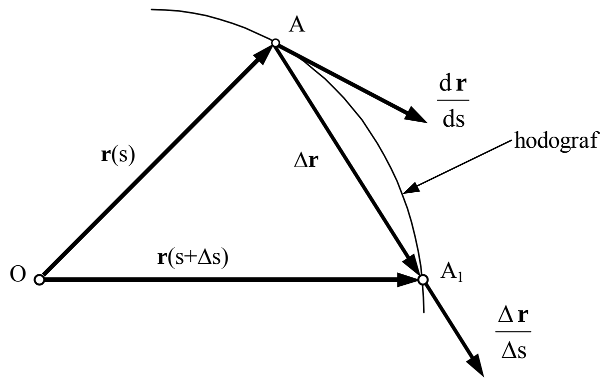
2.7. Pochodna funkcji wektorowej

Założmy, że mamy funkcję wektorową typu (2.44), w której zmienną niezależną jest skalar. Przyrostowi zmiennej niezależnej s będzie towarzyszyć zmiana wektora **r**(s). Jeżeli początki wszystkich wektorów **r**(s) przyłożymy w jednym punkcie O, to ze zmianą zmiennej niezależnej s koniec tego wektora zakreśli w przestrzeni pewną linię nazywaną *hodografem* funkcji wektorowej **r**(s) (rys. 2.13). Niech wartościom s i s + *s odpowiadają wektory **r**(s) i **r**(s + *s), a wektor ***r** jest przyrostem wektora **r**(s) łączącym końce obu wektorów. Wówczas *pochodną funkcji wektorowej względem zmiennej niezależnej nazywamy granicę stosunku przyrostu tej funkcji do przyrostu zmiennej niezależnej, gdy przyrost zmiennej niezależnej dąży do zera:*

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta s}=\frac{\mathbf{r}(s+\Delta s)-\mathbf{r}(s)}{\Delta s}. \tag{2.46}$$



Rys. 2.13. Ilustracja pchodnej funkcji wektorowej

Iloraz Δ**r**/Δs jest wektorem o zwrocie i kierunku wektora Δ**r**, czyli ma kierunek cięciwy. Gdy Δs dąży do zera, to cięciwa przechodzi w styczną. Zatem pochodna wektora jest wektorem stycznym do hodografu.

Z przedstawionego określenia pochodnej funkcji wektorowej wynika, że z formalnego punktu widzenia jest ona zdefiniowana podobnie do pochodnej funkcji skalarnej. Wynika z tego, że do pochodnych sum i iloczynów dwóch wektorów można stosować wzory wyprowadzone w analizie funkcji skalarnych. Dla dwóch funkcji wektorowych **a**(s) i **b**(s) słuszne są następujące zależności:

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{a}\pm\mathbf{b})=\frac{d\mathbf{a}}{ds}\pm\frac{d\mathbf{b}}{ds}, \tag{2.47}$$

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=\frac{d\mathbf{a}}{ds}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{b}}{ds}, \tag{2.48}$$

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\frac{d\mathbf{a}}{ds}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\frac{d\mathbf{b}}{ds}. \tag{2.49}$$

W ostatnim wzorze nie wolno zmieniać kolejności mnożenia, ponieważ iloczyn wektorowy jest nieprzemienny.

Gdy k(s) jest funkcją skalarną, to pochodna iloczynu tej funkcji przez wektor

$$\frac{d}{ds}(k\,\mathbf{a})=\frac{dk}{ds}\mathbf{a}+k\frac{d\mathbf{a}}{ds}. \tag{2.50}$$

Jeżeli zmienna niezależna s jest funkcją innego parametru s(l), to pochodną wektora obliczamy podobnie do pochodnej skalarnej funkcji złożonej:

$$\frac{d\mathbf{a}[s(l)]}{dl}=\frac{d\mathbf{a}}{ds}\frac{ds}{dl}. \tag{2.51}$$

Mamy również:

$$\frac{d\mathbf{a}}{ds}=0, \quad \text{gdy} \quad \mathbf{a}=\text{const}. \tag{2.52}$$

Gdy funkcja wektorowa jest zapisana analitycznie w prostokątnym nieruchomym układzie współrzędnych x, y, z w postaci (2.44a), wtedy jej pochodną po wykorzystaniu wzorów na różniczkowanie sumy (2.47) i iloczynu funkcji (2.50) wyraża wzór:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\frac{dx}{ds}\mathbf{i}+\frac{dy}{ds}\mathbf{j}+\frac{dz}{ds}\mathbf{k}+x\frac{d\mathbf{i}}{ds}+y\frac{d\mathbf{j}}{ds}+z\frac{d\mathbf{k}}{ds}.$$

Ponieważ wersory osi nieruchomego układu współrzędnych są wektorami stałymi, mamy:

$$\frac{d\mathbf{i}}{ds}=\frac{d\mathbf{j}}{ds}=\frac{d\mathbf{k}}{ds}=0,$$

a stąd ostatecznie

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\frac{dx}{ds}\mathbf{i}+\frac{dy}{ds}\mathbf{j}+\frac{dz}{ds}\mathbf{k}. \tag{2.52}$$

Z powyższego wynika, że współrzędne pochodnej wektora są równe pochodnym odpowiednich współrzędnych tego wektora.

Pochodne wyższych rzędów funkcji wektorowych obliczamy analogicznie do funkcji skalarnych.