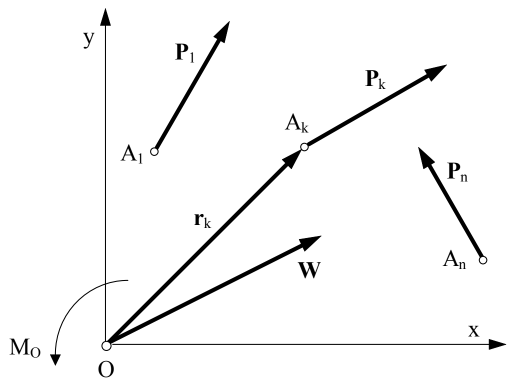
3.8.1. Redukcja płaskiego układu sił

Przez płaski dowolny układ sił będziemy rozumieć układ sił leżących w jednej płaszczyźnie o kierunkach nie przecinających się w jednym punkcie. W dalszym ciągu przyjmiemy, że mamy dany dowolny układ sił $\mathbf{P}_k$ (k = 1, 2, . . . , n) przyłożonych w punktach A_k leżących w płaszczyźnie xy (rys. 3.25).

Postępując podobnie jak w przypadku dowolnego przestrzennego układu sił, płaski układ sił można zredukować do układu równoważnego składającego się z jednej siły **W** przyłożonej w dowolnie obranym biegunie redukcji O i pary sił o momencie $\mathbf{M}_O$. Otrzymamy wzory wektorowe:

$$\mathbf{W} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_k, \quad \mathbf{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{P}_k . \tag{3.43}$$



Rys. 3. 25. Redukcja dowolnego płaskiego układu sił

Wzory te są zewnętrznie identyczne ze wzorami (3.24) na wektor główny i moment główny dowolnego układu sił, ale liczba ich współrzędnych będzie inna. Ponieważ siły leżą w płaszczyźnie xy, wektor główny **W** będzie miał dwie współrzędne, gdyż trzecie współrzędne sił $\mathbf{P}_k$ będą zawsze równe zeru, $P_{kz} \equiv 0$. Jeżeli natomiast jako biegun redukcji O przyjmiemy początek układu współrzędnych x, y (rys. 3.25), to moment główny $\mathbf{M}_O$ będzie zawsze prostopadły do płaszczyzny xy, czyli będzie miał jedną współrzędną. Wynika to z tego, że zgodnie z definicją iloczynu wektorowego moment każdej z sił $\mathbf{P}_k$ względem punktu O musi być prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\mathbf{r}_k$ i $\mathbf{P}_k$. Do analogicznych wniosków dojdziemy po podstawieniu do wzorów (3.27) i (3.28) $P_{kz} = 0$ i $z_k = 0$. Otrzymamy wtedy współrzędne wektora głównego **W** i momentu głównego $\mathbf{M}_O$:

$$\left.\begin{aligned} &W_x = \sum_{k=1}^{n} P_{kx}, \quad W_y = \sum_{k=1}^{n} P_{ky}, \\ &M_O = M_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k P_{ky} - y_k P_{kx} \right) = \sum_{k=1}^{n} M_{kO}. \end{aligned}\right\} \tag{3.44}$$

Z trzeciego wzoru (3.44) oraz z przedstawionych wyżej rozważań wynika, że do określenia momentu głównego wystarczy podanie jednej liczby (moduł opatrzony znakiem), czyli moment płaskiego układu sił można traktować podobnie jak skalar. W tej sytuacji mówiąc o momencie głównym w płaskim układzie sił, będziemy mieć na myśli tylko jego wartość algebraiczną.

3.8.2. Szczególne przypadki płaskiego układu sił

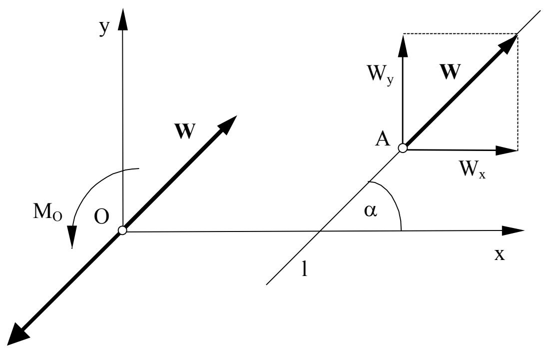
Układ równoważny wypadkowej

W punkcie 3.7.4 udowodniliśmy, że jeżeli moment główny $\mathbf{M}_O$ jest prostopadły do wektora głównego $\mathbf{W}$ (3.42), to układ sił można zredukować do jednej siły wypadkowej działającej wzdłuż osi centralnej. W poprzednim punkcie wykazaliśmy, że warunek ten jest zawsze spełniony. Wynika z tego, że jeżeli wektor główny płaskiego układu sił jest różny od zera, $\mathbf{W} \neq 0$, to układ ten można zastąpić wypadkową.

W celu wyznaczenia linii działania wypadkowej załóżmy, że płaski układ sił $\mathbf{P}_k$ (k = 1, 2, . . . , n) został zredukowany do początku O układu współrzędnych x, y (rys. 3.26) do wektora głównego $\mathbf{W}$ i momentu głównego $\mathbf{M}_O$ o wartości M_O:

$$\mathbf{W} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_k, \quad M_O = \sum_{k=1}^{n} M_{kO}. \tag{3.45}$$

Moment M_O można zastąpić parą sił $-\mathbf{W}$ i $\mathbf{W}$ przyłożonych odpowiednio w punktach O i A. W wyniku takiego działania otrzymaliśmy dwie siły $-\mathbf{W}$ i $\mathbf{W}$ przyłożone w punkcie O oraz jedną siłę przyłożoną w punkcie A i działającą wzdłuż prostej l. Siły $-\mathbf{W}$ i $\mathbf{W}$ przyłożone w punkcie O tworzą układ zerowy, zatem układ sił został sprowadzony do jednej siły $\mathbf{W}$ przyłożonej w punkcie A. Siłę tę, działającą wzdłuż prostej l, nazywamy *wypadkową płaskiego układu sił*.



Rys. 3.26. Redukcja płaskiego układu sił do wypadkowej

Po uwzględnieniu, że moment wypadkowej $\mathbf{W}$ względem dowolnego punktu jest równy sumie momentów wszystkich sił względem tego samego punktu, oraz oznaczeniu współrzędnych punktu A przyłożenia wypadkowej $\mathbf{W}$ przez x i y, otrzymamy na podstawie trzeciego wzoru (3.44) zależność na moment wypadkowej względem początku O układu współrzędnych:

$$M_O = xW_y - yW_x.$$

Występujące w tym wzorze wielkości W_x, W_y i M_O są wielkościami znanymi, określonymi wzorami (3.44), przeto jest to równanie prostej l, wzdłuż której działa wypadkowa $\mathbf{W}$. Równanie to przedstawimy w postaci kierunkowej:

$$y = \frac{W_y}{W_x} x - \frac{M_O}{W_x} . \tag{3.46}$$

Moduł wypadkowej

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} , \tag{3.47}$$

a kąt α, jaki wypadkowa tworzy z osią x, określa wzór:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{W_y}{W_x} . \tag{3.48}$$

Gdy wektor główny jest różny od zera, $\mathbf{W} \neq 0$, a moment główny jest równy zeru, $\mathbf{M}_O = 0$, układ sił redukuje się do wypadkowej przechodzącej przez biegun redukcji.

Na zakończenie omówienia wyznaczania wypadkowej zauważmy istotną różnicę między wektorem głównym i wypadkową. Zarówno wektor główny, jak i wypadkowa są równe sumie geometrycznej wszystkich sił, ale wektor główny jest wektorem swobodnym, a wypadkowa jest siłą o ściśle określonej linii działania.

Układ równoważny parze sił

Jeżeli wektor główny płaskiego układu sił jest równy zeru, $\mathbf{W} = 0$, a moment główny jest różny od zera, $\mathbf{M}_O \neq 0$, to taki układ sił można zastąpić jedną parą sił o momencie równym sumie momentów wszystkich sił względem dowolnego punktu O:

$$M_O = \sum_{k=1}^{n} M_{kO} . \tag{3.49}$$

Ponieważ parę sił można dowolnie przesuwać w jej płaszczyźnie działania (p. 3.6), wartość momentu głównego M_O nie będzie zależna od położenia bieguna redukcji O na płaszczyźnie działania sił.

Układ równoważny zeru

Jeżeli wektor główny i moment główny są równocześnie równe zeru, czyli $\mathbf{W} = 0$ i $\mathbf{M}_O = 0$, to układ sił jest w równowadze. Przypadek ten będzie rozpatrzony w następnym punkcie.

Przykład 3.3. Na płytę w kształcie kwadratu o boku a = 1 m działają cztery siły: $P_1 = 100\,\mathrm{N}$, $P_2 = 150\,\mathrm{N}$, $P_3 = 200\,\mathrm{N}$, $P_4 = 250\,\mathrm{N}$ (rys. 3.27), przy czym $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$. Obliczyć wartość liczbową wypadkowej oraz linię jej działania.

Rozwiązanie. Współrzędne wektora głównego obliczymy z pierwszych dwóch wzorów (3.44):

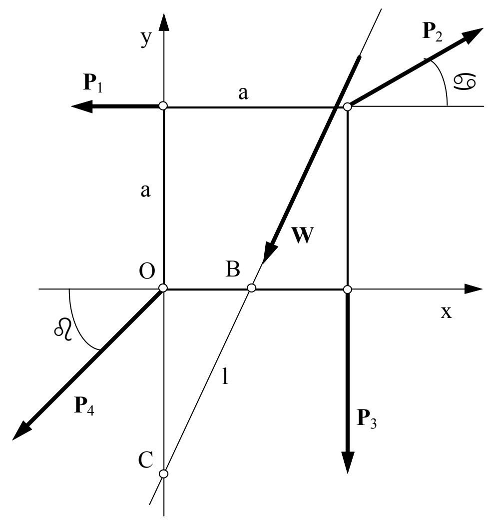
$$\left.\begin{aligned} W_x &= \sum_{k=1}^{4} P_{kx} = -P_1 + P_2\cos\alpha - P_4\cos\beta \approx -147\ \text{N}, \\ W_y &= \sum_{k=1}^{4} P_{ky} = P_2\sin\alpha - P_3 - P_4\sin\beta \approx -302\ \text{N}. \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

Zgodnie z drugim wzorem (3.45) moment główny względem początku O układu współrzędnych

$$M_O = \sum_{k=1}^{4} M_{kO} = aP_1 - aP_2\cos\alpha + aP_2\sin\alpha - aP_3 \approx -155\text{N}\cdot\text{m}. \tag{b}$$

Ponieważ współrzędne wektora głównego są równe współrzędnym wypadkowej, moduł wypadkowej

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = \sqrt{(-147)^2 + (-302)^2} \approx 336\,\text{N}\,.$$



Rys. 3.27. Analityczne wyznaczenie wypadkowej płaskiego układu sił

Równanie linii działania wypadkowej otrzymamy przez podstawienie obliczonych wartości (a) i (b) do równania (3.46).

$$y = 2{,}05x - 1{,}05\,.$$

Otrzymana prosta l jest nakreślona na rys. 3.27. Odcina ona na osi odciętych odcinek $OB = 0{,}51\,\text{m}$, a na osi rzędnych odcinek $OC = 1{,}05\,\text{m}$.

3.8.3. Warunki równowagi płaskiego układu sił

Na końcu poprzedniego punktu powiedziano, że jeżeli wektor główny $\mathbf{W}$ i moment główny $\mathbf{M}_O$ dowolnego płaskiego układu sił są równocześnie równe zeru, to układ sił jest w równowadze. Zatem wektorowe warunki równowagi możemy zapisać następująco:

$$\mathbf{W} = 0, \quad \mathbf{M}_O = 0\,. \tag{3.50}$$

Po przyrównaniu do zera współrzędnych wektora głównego (3.44) otrzymamy trzy równania równowagi:

$$\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{kO}\,. \tag{3.51}$$

Należy tutaj zaznaczyć, że punkt O, względem którego obliczamy sumę momentów danych sił, nie musi być początkiem przyjętego układu współrzędnych, lecz może być punktem obranym całkowicie dowolnie. Po uwzględnieniu powyższej uwagi równaniom równowagi (3.51) można nadać taką treść:

Aby płaski dowolny układ sił był w równowadze, sumy rzutów wszystkich sił na dwie osie układu współrzędnych i suma momentów tych sił względem dowolnego punktu płaszczyzny działania sił muszą być równe zeru.

Można udowodnić [7, 11], że zamiast równań równowagi w postaci dwóch równań rzutów i jednego równania momentów (3.51) można zastosować albo dwa równania momentów względem dwóch punktów A i B oraz jedno równanie rzutów, albo trzy równania momentów względem trzech punktów A, B i C. Wymienione warunki równowagi podamy bez dowodu.

Pierwszy sposób:

$$\sum_{k=1}^{n} M_{kA} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{kB} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0\,. \tag{3.52}$$

Płaski układ sił jest w równowadze, jeżeli sumy momentów wszystkich sił względem dwóch punktów są równe zeru i suma rzutów tych sił na dowolną oś nieprostopadłą do prostej łączącej te dwa punkty jest równa zeru.

Drugi sposób:

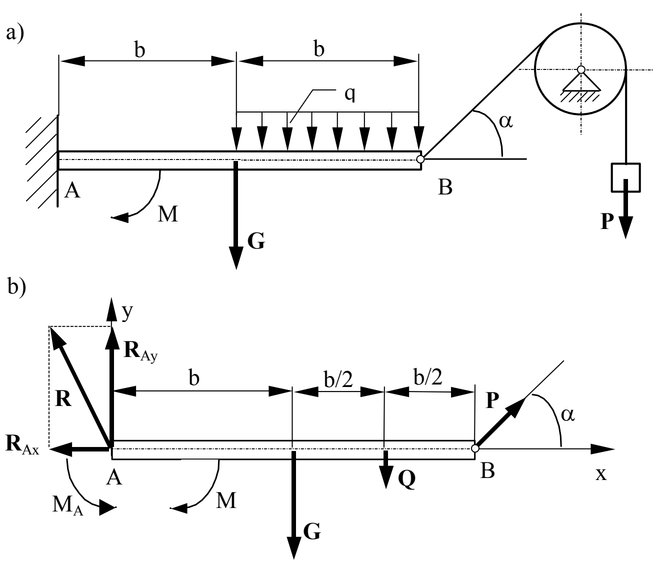
$$\sum_{k=1}^{n} M_{kA} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{kB} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{kC} = 0\,. \tag{3.53}$$

Płaski układ sił jest w równowadze, jeżeli sumy momentów wszystkich sił względem trzech punktów nie leżących na jednej prostej są równe zeru.

Udowodnienie warunków równowagi w postaci (3.52) i (3.53) pozostawiamy Czytelnikowi.

Wybierając równania równowagi do rozwiązania zagadnień praktycznych, należy kierować się tym, aby w każdym równaniu występowała jak najmniejsza liczba niewiadomych. Upraszcza to znacznie obliczenia rachunkowe.

Przykład 3.4. Belka AB o ciężarze G = 10 kN jest utwierdzona na końcu A i obciążona momentem $M = 20\,\mathrm{kN} \bullet\ \mathrm{m}$ i obciążeniem ciągłym q = 1 kN/m (rys. 3.28a). Do końca B jest przymocowana wiotka linka, która jest przerzucona przez idealny krążek (bez tarcia) i obciążona ciężarem P = 5 kN. Obliczyć reakcje w podporze A, jeżeli b = 2 m i $\alpha = 30^{\circ}$.



Rys. 3.28. Rozkład sił w belce wspornikowej

Rozwiązanie. Ponieważ koniec A jest utwierdzony, podpora – zgodnie z omówionymi w p. 3.2.2 rodzajami więzów – wnosi do zadania trzy niewiadome: dwie współrzędne R_{Ax} i R_{Ay} oraz moment utwierdzenia M_A. Ze względu na to, że linka jest wiotka i że pomijamy tarcie w krążku, na koniec B będzie działać siła P. Zatem po uwolnieniu od więzów na belkę będą działać siły przedstawione na rys. 3.28b.

Obciążenie ciągłe zastąpiono siłą skupioną $Q = qb = 2\,\mathrm{kN}$. Trzy niewiadome

R_{Ax}, R_{Ay} i M_A wyznaczymy z trzech równań równowagi w postaci dwóch równań rzutów sił na osie x i y oraz sumy momentów względem punktu A.

$$\sum P_{kx} = -R_{Ax} + P\cos\alpha = 0,$$
$$\sum P_{ky} = R_{Ay} - G - Q - P\sin\alpha = 0,$$
$$\sum M_{kA} = M_A - M - Gb - Q\frac{3}{2}b + \left(P\sin\alpha\right)2b = 0.$$

Po rozwiązaniu tego układu równań mamy:

$$R_{Ax} = P\cos 30^{o} = 2{,}5\sqrt{3}\text{kN},$$
$$R_{Ay} = G + Q - P\sin 30^{o} = 9{,}5\text{kN},$$
$$M_A = M + bG + \frac{3}{2}bQ - 2bP\sin 30^{o} = 36\text{kNm}.$$

Wartość reakcji

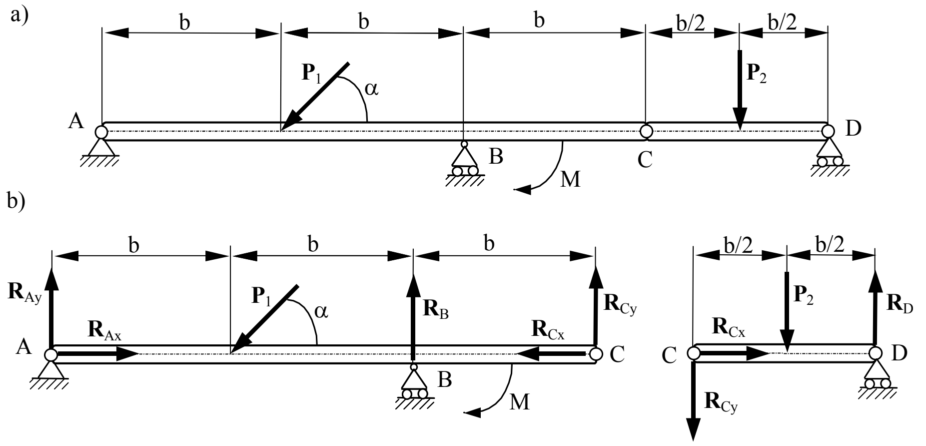
$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{\left(2{,}5\sqrt{3}\right)^2 + 9{,}5^2} = 10{,}44 \text{ kN}.$$

P**rzykład 3.5**. Belka AD składa się z dwóch części AC i CD połączonych przegubem C. Koniec A jest podparty stałą podporą przegubową, a na końcu D znajduje się przesuwna podpora przegubowa. Część belki AC opiera się w punkcie B na przesuwnej podporze przegubowej (rys. 3.29a). Belka jest obciążona siłami skupionymi P_1 = 6 kN i P_2 = 5 kN oraz momentem M = 30 kNm. Wyznaczyć reakcje podpór A, B i D oraz oddziaływanie w przegubie C, jeżeli b = 2 m, α = 45^{o}. Pominąć ciężar własny belki oraz tarcie w przegubach.

Rozwiązanie. W podanym przykładzie mamy do czynienia z układem dwóch brył związanych i aby rozwiązać to zadanie, musimy rozdzielić belkę w przegubie C na dwa podukłady i rozpatrywać równowagę każdego podukładu. Będziemy mieli wtedy do dyspozycji po trzy równania równowagi dla każdej części belki. Jeżeli liczba niewiadomych reakcji wynikających z podparcia belki będzie równa sześć, to układ będzie statycznie wyznaczalny.

a)

b)



Rys. 3.29. Rozkład sił w belce przegubowej

W naszym przypadku kierunek reakcji $\mathbf{R}_A$ w przegubie nie jest znany, wiadomo tylko, że linia działania tej reakcji musi przejść przez środek przegubu, czyli przez punkt A. Reakcję tę rozłożymy na dwie składowe $\mathbf{R}_{Ax}$ i $\mathbf{R}_{Ay}$ wzdłuż osi prostokątnego układu współrzędnych (rys. 3.29b). Podobnie musimy postąpić z oddziaływaniem w przegubie C, czyli wiemy tylko, że siła $\mathbf{R}_C$ oddziaływania jednej części belki na drugą przechodzi przez środek przegubu C. Rozłożymy ją również na składowe $\mathbf{R}_{Cx}$ i $\mathbf{R}_{Cy}$. Kierunki reakcji $\mathbf{R}_B$ i $\mathbf{R}_D$ są znane, ponieważ linie działania tych reakcji są prostopadłe do płaszczyzny, po której mogą się przesuwać podpory B i D. W omawianym przykładzie reakcje te będą miały kierunek pionowy, a więc prostopadły do osi belki. Mamy zatem sześć niewiadomych $\mathbf{R}_{Ax}$, $\mathbf{R}_{Ay,}$ $\mathbf{R}_B$, $\mathbf{R}_{Cx}$, $\mathbf{R}_{Cy}$ i $\mathbf{R}_D$, czyli tyle, ile równań daje nam statyka.

Równania równowagi dla lewej części belki:

$$\sum P_{kx} = R_{Ax} - P_1 \cos\alpha - R_{Cx} = 0,$$

$$\sum P_{ky} = R_{Ay} - P_1 \sin\alpha + R_B + R_{Cy} = 0,$$

$$\sum M_{kA} = -(P\sin\alpha)b + R_B 2b - M + R_{Cy} 3b = 0.$$

Równania równowagi dla prawej części belki:

$$\sum P_{kx} = R_{Cx} = 0,$$

$$\sum P_{ky} = -R_{Cy} - P_2 + R_D = 0,$$

$$\sum M_{kC} = -P_2\, 0{,}5b + R_D b = 0.$$

Mamy zatem układ sześciu równań z sześcioma niewiadomymi. Po rozwiązaniu tego układu otrzymamy:

$$R_{Ax} = P_1 \cos\alpha = 4{,}24\text{kN}, \quad R_{Ay} = 0{,}5\left(P_1 \sin\alpha - 0{,}5P_2 - \frac{M}{b}\right) = -4{,}13\text{kN},$$

$$R_B = 0{,}5\left(P_1 \sin\alpha + 1{,}5P_2 + \frac{M}{b}\right) = 19{,}62\text{kN},$$

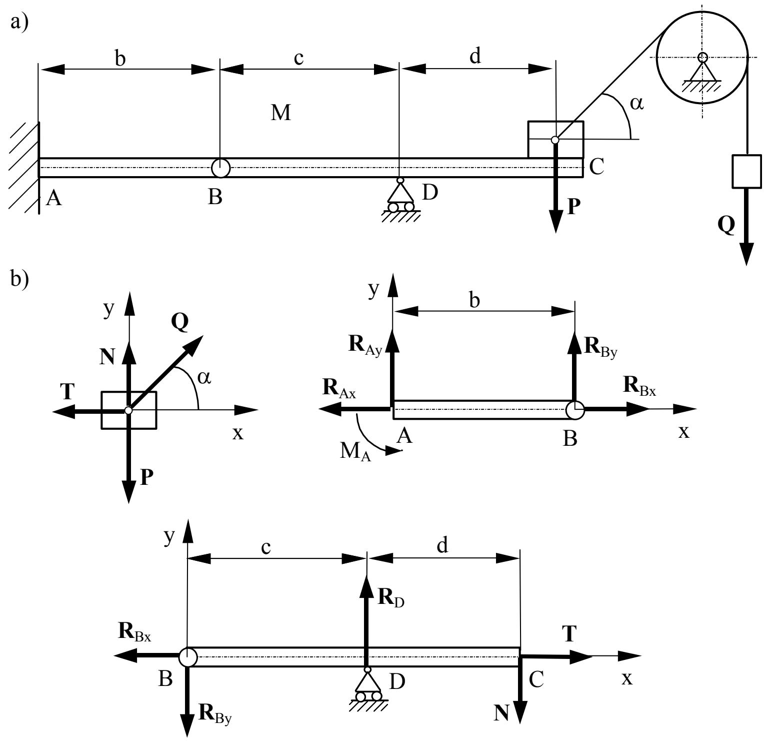
$$R_{Cx} = 0, \qquad R_C = R_{Cy} = -0{,}5P_2 = -2{,}5\text{kN}, \qquad R_D = 0{,}5P_2 = 2{,}5\text{kN}.$$

Wartość reakcji

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{(4{,}24)^2 + (-4{,}13)^2} = 5{,}92\text{kN}.$$

Znak minus przy reakcjach R_{Ay} i R_{Cy} oznacza, że mają one zwroty przeciwne do założonych na rys. 3.29b.

Przykład 3.6. Układ przedstawiony na rys. 3.30a składa się z dwóch belek AB i BC połączonych ze sobą przegubem B. Belka AB jest utwierdzona w punkcie A, a belka BC jest podparta podporą przesuwną w punkcie D. Na końcu C belki BC



Rys. 3.30. Rozkład sił w belce przegubowej

spoczywa klocek o ciężarze **P**. Do klocka jest przymocowana wiotka linka, przerzucona przez idealny krążek i obciążona ciężarem **Q**. Linka tworzy z poziomem kąt α, a współczynnik tarcia między klockiem i belką wynosi μ. Wyznaczyć minimalną wartość ciężaru klocka $P = P_{min}$, aby była zachowana równowaga (aby klocek nie zsunął się z belki), a następnie dla tego przypadku wyznaczyć reakcje w podporach A i D oraz oddziaływanie w przegubie B. Wymiary belki wnoszą b, c i d. Pominąć ciężary własne belek, tarcie w przegubach oraz wysokość klocka.

Rozwiązanie. W celu rozwiązania powyższego zadania rozdzielimy układ przedstawiony na rys. 3.30a na trzy podukłady: klocek, belkę AB oraz belkę BC, a następnie rozpatrzymy równowagę każdego z nich. Na rysunku 3.30b przedstawiono wymienione podukłady uwolnione od więzów i zaznaczono siły działające na te podukłady. Na klocek działają siły czynne **P** i **Q** oraz reakcja belki, którą rozłożono na siłę tarcia **T** i siłę normalną **N**.

Po zaniedbaniu wymiarów klocka układ sił na niego działający możemy uważać za zbieżny. Na belkę AB w końcu A działa reakcja $\mathbf{R}_A$, którą rozłożono na dwie składowe $\mathbf{R}_{Ax}$ i $\mathbf{R}_{Ay}$, oraz moment utwierdzenia M_A. Oddziaływanie belki BC na belkę AB za pośrednictwem przegubu B również rozłożono na składowe $\mathbf{R}_{Bx}$ i $\mathbf{R}_{By}$. Na belkę BC działa siła w przegubie B rozłożona, podobnie jak w przypadku belki AB, na składowe $\mathbf{R}_{Bx}$ i $\mathbf{R}_{By}$. W podporze D działa na tę belkę reakcja $\mathbf{R}_D$ o znanym kierunku. Działanie klocka na koniec C belki BC zastąpiono siłą tarcia **T** i reakcją normalną **N**.

W pierwszej kolejności, zgodnie z treścią zadania, musimy wyznaczyć minimalną wartość ciężaru klocka $P = P_{min}$ zapewniającą jego równowagę. Równania równowagi klocka w postaci rzutów sił na osie x i y są następujące:

$$\left.\begin{aligned} \sum P_{kx} &= Q\cos\alpha - T = 0, \\ \sum P_{ky} &= N + Q\sin\alpha - P = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

Minimalną wartość siły **P** otrzymamy, przyjąwszy, że siła tarcia ma wartość maksymalną, czyli:

$$T = \mu N .$$

Po uwzględnieniu wzoru z pierwszego równania (a) mamy:

$$T = Q\cos\alpha, \quad N = \frac{1}{\mu} Q\cos\alpha . \qquad \text{(b)}$$

Po podstawieniu wzoru na N do drugiego równania (a) otrzymamy szukaną wartość siły ciężaru **P**:

$$P = P_{min} = \left(\frac{1}{\mu}\cos\alpha + \sin\alpha \right) Q . \qquad \text{(c)}$$

Równania równowagi dla belki AB mają postać:

$$\left.\begin{aligned} \sum P_{kx} &= R_{Bx} - R_{Ax} = 0, \\ \sum P_{ky} &= R_{Ay} + R_{By} = 0, \\ \sum M_{kA} &= M_A + R_{By} b = 0, \end{aligned}\right\} \tag{d}$$

a równania równowagi dla belki BC są następujące:

$$\left.\begin{aligned} \sum P_{kx} &= T - R_{Bx} = 0, \\ \sum P_{ky} &= R_D - R_{By} - N = 0, \\ \sum M_{kB} &= R_D c - N(c + d) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{e}$$

Ponieważ T i N są już znanymi wielkościami określonymi wzorami (b), w równaniach (d) i (e) mamy sześć niewiadomych. Zatem po rozwiązaniu tego układu równań otrzymamy:

$$R_{Ax} = R_{Bx} = Q\cos\alpha, \quad R_{Ay} = -R_{By} = -\frac{d}{\mu c} Q\cos\alpha,$$

$$R_D = \frac{(c + d)}{\mu \quad c} Q\cos\alpha, \quad M_A = -\frac{b \qquad d}{\mu c} Q\cos\alpha.$$

Wartości reakcji $\mathbf{R}_A$ i siły oddziaływania $\mathbf{R}_B$ w przegubie B obliczymy z poniższych wzorów:

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{(Q\cos\alpha)^2 + \left(-\frac{d}{\mu c} Q\cos\alpha\right)^2} = \frac{\sqrt{\mu^2 c^2 + d^2}}{\mu c} Q\cos\alpha,$$

$$R_B = \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{By}^2} = \sqrt{(Q\cos\alpha)^2 + \left(\frac{d}{\mu c} Q\cos\alpha\right)^2} = \frac{\sqrt{\mu^2 c^2 + d^2}}{\mu c} Q\cos\alpha.$$