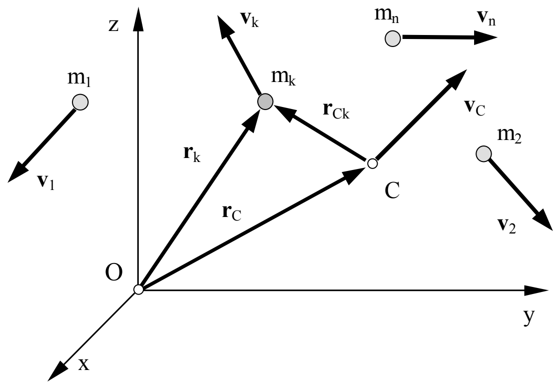
7.2.1. Pęd układu materialnego i bryły

Pędem punktu materialnego o masie m *i prędkości* **v** *nazywamy iloczyn masy punktu i jego prędkości*:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \qquad (7.40)$$

Z powyższej definicji wynika, że pęd jest wektorem o kierunku prędkości, a więc jest wektorem stycznym do toru punktu materialnego.

Dla układu n punktów materialnych o masach m_k i prędkości $\mathbf{v}_k$ (rys. 7.12) pęd będzie równy sumie pędów poszczególnych punktów materialnych:



Rys. 7.12. Wyznaczenie pędu układu materialnego

$$\mathbf{p} = \sum_{k=1}^{n} m_k \, \mathbf{v}_k \, . \qquad (7.41)$$

Wzór (7.41) można przedstawić w postaci:

$$\mathbf{p} = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} m_k \, \mathbf{r}_k \, . \qquad (a)$$

Widzimy, że występująca pod znakiem pochodnej suma, zgodnie ze wzorem (4.18), jest momentem statycznym **S** rozpatrywanego układu materialnego względem początku nieruchomego układu współrzędnych x, y, z :

$$\mathbf{S} = \sum_{k=1}^{n} m_k \, \mathbf{r}_k = m\,\mathbf{r}_C \, . \qquad (b)$$

Po podstawieniu wzoru (b) do wzoru (a) i wykonaniu różniczkowania wzór (7.41) możemy zapisać w postaci:

$$\mathbf{p} = \sum_{k=1}^{n} m_k \, \mathbf{v}_k = m\,\mathbf{v}_C = \frac{d\mathbf{S}}{dt}, \qquad (7.42)$$

gdzie m jest masą całkowitą układu materialnego.

Z otrzymanego wzoru wynika, że pęd układu materialnego jest równy iloczynowi masy całkowitej m układu materialnego i prędkości $\mathbf{v}_C$ środka masy C. Ponadto wzór (7.42) pozwala na inne zdefiniowanie pędu.

Pędem nazywamy pochodną względem czasu momentu statycznego układu materialnego względem nieruchomego punktu:

$$\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{S}}{dt}. \tag{7.43}$$

Ponieważ moment statyczny względem środka masy jest równy zeru (patrz p. 4.4), zatem pęd układu materialnego względem środka masy jest także równy zeru.

Pęd bryły sztywnej możemy obliczyć, dzieląc ją na elementy o masach Δm_k i traktując ją jako układ punktów materialnych. Przybliżoną wartość pędu otrzymamy po zsumowaniu pędów tych elementów, traktowanych jako punkty materialne.
Z kolei wartość dokładną pędu otrzymamy po wyznaczeniu granicy sumy, gdy liczba elementów dąży do nieskończoności

$$\mathbf{p} = \lim_{k\to\infty}\sum_{k=1}^{n} m_k\,\mathbf{v}_k = \int_m \mathbf{v}\,dm = \int_m \frac{d\mathbf{r}}{dt}m = \frac{d}{dt}\int_m \mathbf{r}\,dm\,.$$

Całka występująca w tym wzorze pod znakiem pochodnej jest momentem statycznym bryły względem początku układu współrzędnych:

$$\int_m \mathbf{r}\,dm = m\,\mathbf{r}_C\,.$$

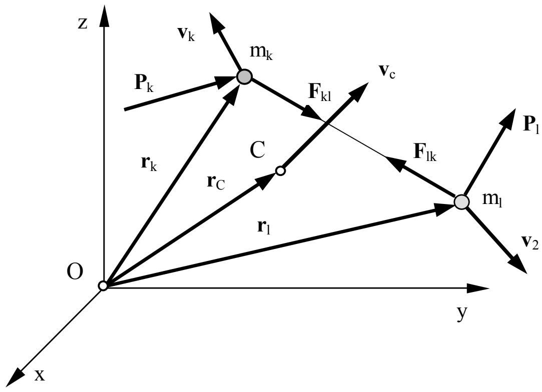
Z uwzględnieniem powyższej zależności otrzymujemy wzór na pęd bryły:

$$\mathbf{p} = \frac{d}{dt}\left(m\,\mathbf{r}_C\right) = m\frac{d\mathbf{r}_C}{dt} = m\,\mathbf{v}_C\,. \tag{7.44}$$

Widzimy zatem, że pęd bryły, podobnie jak pęd układu materialnego, jest równy iloczynowi jej masy i prędkości środka masy.

7.2.2. Zasada pędu i popędu. Zasada zachowania pędu

Rozpatrzymy obecnie układ składający się z n punktów materialnych o masach m_k i prędkości $\mathbf{v}_k$. Na poszczególne punkty rozpatrywanego układu materialnego działają siły zewnętrzne i wewnętrzne. Na rysunku 7.13 zaznaczono siły działające na dwa punkty o masach m_k i m_l. Siły zewnętrzne działające na te punkty zastąpiono siłami wypadkowymi $\mathbf{P}_k$ i $\mathbf{P}_l$, siły wzajemnego oddziaływania między tymi punktami oznaczono przez $\mathbf{F}_{kl}$ i $\mathbf{F}_{lk}$.



Rys. 7.13. Siły zewnętrzne i wewnętrzne działające na punkty układu materialnego

Wypadkowa sił wewnętrznych działających na punkt o masie m_k

$$\mathbf{P}_{wk} = \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{n} \mathbf{F}_{kl}\ , \tag{7.45}$$

a wypadkowa wszystkich sił działających na ten punkt

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{P}_k + \mathbf{P}_{wk}. \tag{7.46}$$

Zatem zgodnie z drugim prawem Newtona możemy dla dowolnego punktu rozważanego układu materialnego napisać dynamiczne równanie ruchu w postaci:

$$m_k \frac{d^2\,\mathbf{r}_k}{dt^2} = \mathbf{P}_k + \mathbf{P}_{wk}\,(k = 1,2,\dots,n). \tag{7.47}$$

Po założeniu, że masa m_k jest wielkością stałą, lewą stronę tego równania możemy przedstawić w postaci pochodnej względem czasu pędu $m_k\mathbf{v}_k$ punktu:

$$m_k \frac{d^2\,\mathbf{r}_k}{dt^2} = m_k \frac{d\,\mathbf{v}_k}{dt} = \frac{d(m_k\,\mathbf{v}_k)}{dt}\ .$$

Równanie (7.47) można obecnie zapisać następująco:

$$\frac{d(m_k\,\mathbf{v}_k)}{dt} = \mathbf{P}_k + \mathbf{P}_{wk}\,(k = 1,2,\dots,n). \tag{c}$$

Jeżeli dodamy stronami n powyższych równań, to otrzymamy:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{d(m_k\,\mathbf{v}_k)}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_k + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_{wk} \ ,$$

a jeżeli zastąpimy sumę pochodnych pędów pochodną ich sumy, to

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} m_k\,\mathbf{v_k} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_k + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_{kz} \ . \tag{d}$$

Lewa strona równania (d) jest pochodną względem czasu pędu układu materialnego:

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} m_k\,\mathbf{v_k} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \ .$$

Pierwsza suma po prawej stronie równania (d) jest wektorem głównym sił zewnętrznych:

$$\mathbf{W} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_k \ ,$$

a druga sumą wszystkich sił wewnętrznych działających w całym układzie materialnym i zgodnie ze wzorem (3.3) jest równa zeru:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_{wk} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{n} \mathbf{F}_{kl} = 0.$$

Ostatecznie równanie (d) można zapisać w postaci:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{W} \ . \tag{7.48}$$

Równanie to przedstawia zasadę pędu układu punktów materialnych, którą można wypowiedzieć następująco:

Pochodna względem czasu pędu układu punktów materialnych jest równa wektorowi głównemu sił zewnętrznych działających na ten układ.

W celu wyznaczenia zmiany pędu układu punktów materialnych w skończonym przedziale czasu, np. od 0 do t, wywołanej przez siły zewnętrzne działające na ten układ, scałkujmy równanie (7.48) w tym przedziale czasu. Otrzymamy wtedy:

$$\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(0) = \int_0^t \mathbf{W}\,dt \ . \tag{7.49}$$

Równanie to nazywamy *zasadą pędu i popędu* lub prawem zmienności pędu.

Przyrost pędu układu materialnego w skończonym przedziale czasu jest równy popędowi wektora głównego sił zewnętrznych działających na ten układ.

Całkę z prawej strony równania (7.49) nazywamy *popędem wektora głównego* lub impulsem wektora głównego. Ta druga nazwa ma swoje uzasadnienie zwłaszcza w przypadku sił krótkotrwałych, np. sił zderzeniowych. Łatwo zauważyć, że gdy wektor główny układu sił zewnętrznych jest równy zeru:

$$\mathbf{W} = 0,$$

popęd tego wektora jest również równy zeru, a z zasady pędu i popędu wynika, iż pęd końcowy jest równy początkowemu:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0),$$

czyli pęd układu materialnego jest stały:

$$\mathbf{p} = \mathrm{const}\,. \tag{7.50}$$

Jest to *zasada zachowania pędu*:

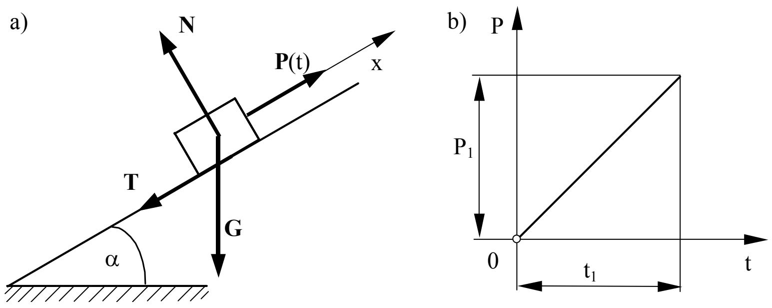
Jeżeli wektor główny układu sił zewnętrznych działających na układ materialny jest równy zeru, to pęd tego układu materialnego jest stały.

Gdy pęd układu materialnego przedstawimy w postaci iloczynu masy m i prędkości $\mathbf{v}_C$ środka masy, to z zasady zachowania pędu:

$$m\,\mathbf{v}_C = \mathrm{const}$$

wynika, że środek masy porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Przykład 7.7. Klocek o masie m = 40 kg porusza się po równi pochyłej o kącie nachylenia $\alpha = 30^{\circ}$ pod działaniem siły będącej funkcją czasu **P** = **P**(t) (rys. 7.14a). Miara tej siły zmienia się w czasie od 0 do P_1 = 250 N zgodnie z wykresem podanym na rys. 7.14b. Współczynnik tarcia między klockiem i równią $\mu = 0,1$. Obliczyć prędkość v_1, jaką osiągnie ciało w chwili t_1 = 3 s, jeżeli w chwili t = 0 prędkość początkowa $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$.



Rys. 7.14. Wyznaczenie prędkości klocka

Rozwiązanie. Do rozwiązania zadania zastosujemy zasadę pędu i popędu (7.49). W myśl tej zasady przyrost pędu klocka w czasie od t = 0 do t = t_1 będzie równy popędowi wektora głównego sił zewnętrznych działających na niego:

$$\mathbf{p}(t_1) - \mathbf{p}(0) = \int_0^{t_1} \mathbf{W}\, dt\,.$$

Wektory z tego równania zrzutujemy na oś x równoległą do równi. Po uwzględnieniu zależności (7.44) mamy:

$$mv_1 - mv_0 = \int_0^{t_1} W_x dt\,. \tag{a}$$

Zgodnie z rysunkiem suma rzutów wszystkich sił działających na klocek na oś x

$$W_x = P(t) - mg\sin\alpha - T = P(t) - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha\,, \tag{b}$$

gdzie $T = \mu N = \mu mg\cos\alpha$. Po podstawieniu (b) do równania (a) mamy:

$$\begin{aligned} mv_1 - mv_0 &= \int_0^{t_1} P(t)dt - mg\int_0^{t_1} (\sin\alpha + \mu\cos\alpha)dt = \\ &= \int_0^{t_1} P(t)dt - mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)t_1. \end{aligned} \tag{c}$$

Całka występująca w powyższym wzorze jest równa polu wykresu przedstawionego na rys. 7.14b, czyli

$$\int_0^{t_1} P(t)dt = \frac{1}{2}P_1 t_1\,.$$

Po podstawieniu tej równości do (c) otrzymujemy wzór na prędkość v_1:

$$v_1 = v_0 + \frac{P_1 t_1}{2m} - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)t_1 .$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$v_1 = 10 + \frac{250 \cdot 3}{2 \cdot 40} - 9{,}81(\sin 30^o + 0{,}1\cos 30^o)3 = 2{,}1 \text{ m/s} .$$

7.2.3. Twierdzenie o ruchu środka masy

Pęd **p** w wyprowadzonym w poprzednim punkcie równaniu (7.48), wyrażającym zasadę pędu, możemy przedstawić za pomocą iloczynu całkowitej masy m układu materialnego i prędkości $\mathbf{v}_C$ środka jego masy C. Otrzymamy wówczas:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\,\mathbf{v}_C)}{dt} = m\frac{d\,\mathbf{v}_C}{dt} = \mathbf{W}\,. \tag{e}$$

Występująca w tym równaniu pochodna prędkości środka masy względem czasu jest przyśpieszeniem środka masy. Mamy więc:

$$m\mathbf{a}_C = \mathbf{W}\,. \tag{7.51}$$

Po zapisaniu wektorów $\mathbf{a}_C$ i $\mathbf{W}$ w układzie współrzędnych x, y, z:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a}_C &= a_{Cx}\,\mathbf{i} + a_{Cy}\,\mathbf{j} + a_{Cz}\,\mathbf{k}, \\ \mathbf{W} &= W_x\,\mathbf{i} + W_y\,\mathbf{j} + W_y\,\mathbf{k} \end{aligned}\right\} \tag{f}$$

wektorowe równanie (7.51) możemy przedstawić w postaci trzech równań skalarnych:

$$ma_{Cx} = W_x, ma_{Cy} = W_y, ma_{Cz} = W_z\,. \tag{7.52}$$

Wektorowe równania (7.51) i równoważne mu trzy równania skalarne (7.52) są dynamicznymi równaniami ruchu środka masy. Pozwalają one na wyznaczenie ruchu środka masy pod wpływem znanych sił zewnętrznych. Otrzymane równania (7.51) lub (7.52) pozwalają na sformułowanie twierdzenia, znanego pod nazwą *twierdzenia o ruchu środka masy.*

Środek masy układu materialnego porusza się tak jak punkt materialny o masie równej całkowitej masie układu, na który działa siła równa wektorowi głównemu sił zewnętrznych działających na ten układ.

Twierdzenie o ruchu środka masy wynika również z pierwszej całki zasady pędu, czyli z zasady pędu i popędu przedstawionej w postaci:

$$m\,\mathbf{v}_C(t) - m\,\mathbf{v}_C(0) = \int_0^t \mathbf{W}\,dt\,. \tag{7.53}$$

Twierdzenie to jest ważnym narzędziem badania ruchu środka masy, ale nie pozwala na wyciągnięcie żadnych wniosków co do ruchu punktów należących do układu względem środka masy.

Z twierdzenia o ruchu środka masy wynika, że siły wewnętrzne nie mogą zmienić ruchu środka masy ani jego położenia.

Twierdzenie to odnosi się nie tylko do układu punktów materialnych, ale również do ciała sztywnego i bryły. Nałożywszy bowiem na układ punktów materialnych warunek, aby odległość dowolnych punktów układu była niezmienna, otrzymujemy model ciała sztywnego.

7.2.4. Ruch układu o zmiennej masie

Do tej pory w rozważaniach dotyczących pędu układu materialnego zakładaliśmy, że całkowita masa układu nie ulega zmianie w czasie ruchu. Obecnie zajmiemy się ruchem układu materialnego, którego masa będzie się zmieniać z upływem czasu poprzez odłączanie lub dołączanie elementów masy. Taka zmiana masy układu będzie miała wpływ na jego ruch.

Typowym przykładem ruchu układu o zmiennej masie są rakiety, z których w czasie pracy silnika następuje wypływ gazów spalinowych, a tym samym zmniejsza się masa rakiety. Innym przykładem mogą być urządzenia do transportu ciągłego ze zmieniającą się w czasie ilością przenoszonego materiału.

W dalszych rozważaniach ze zrozumiałych względów ograniczymy się jedynie do wyprowadzenia równania ruchu ciała o zmiennej masie. Do ułożenia równania ruchu wykorzystamy zasadę pędu (7.48) zapisaną w postaci:

$$\frac{d(m\,\mathbf{v}_C)}{dt} = \mathbf{W}\,. \tag{g}$$

Przyjmijmy, ze środek układu materialnego o masie m porusza się względem układu odniesienia z prędkością $\mathbf{v}_C$ i w pewnej chwili masa układu zaczyna się zmieniać w sposób ciągły. Zakładając, że w czasie dt od układu odrywa się (lub przyłącza do niego) masa elementarna dm z prędkością bezwzględną $\mathbf{v}_b$, określimy elementarną zmianę pędu. W chwili początkowej t pęd układu wynosi

$$m\,\mathbf{v}_C\,, \tag{h}$$

a w chwili t + dt

$$(m - dm)(\mathbf{v}_C - d\,\mathbf{v}) + dm\,\mathbf{v}_b\,. \tag{i}$$

Elementarną zmianę pędu otrzymamy przez odjęcie zależności (i) od (h).

$$\begin{aligned} d(m\,\mathbf{v}_C) &= m\,\mathbf{v}_C - \left[(m - dm)(\mathbf{v}_C - d\,\mathbf{v}) + dm\,\mathbf{v}_b\right] = \\ &= m\,\mathbf{v}_C - m\,\mathbf{v}_C + md\,\mathbf{v} + dm\,\mathbf{v}_C - dmd\,\mathbf{v} - dm\,\mathbf{v}_b = \\ &= md\,\mathbf{v} - dm(\mathbf{v}_b - \mathbf{v}_C) - dmd\,\mathbf{v}\,. \end{aligned}$$

Po pominięciu iloczynu różniczek $dmd\mathbf{v}$ jako małej wartości drugiego rzędu elementarna zmiana pędu

$$d(m\,\mathbf{v}_C) = md\,\mathbf{v} - dm\,\mathbf{v}_w\,, \tag{j}$$

gdzie

$$\mathbf{v}_w = \mathbf{v}_b - \mathbf{v}_C$$

i jest prędkością masy dm względem masy m, czyli prędkością względną. Po uwzględnieniu wyrażenia (h) w równaniu (e) otrzymamy równanie ruchu układu o zmiennej masie nazywane równaniem Mieszczerskiego:

$$m\frac{d\,\mathbf{v}_C}{dt} = \mathbf{v}_w\frac{dm}{dt} + \mathbf{W}$$

lub w postaci

$$m\frac{d\,\mathbf{v}_C}{dt} = \mathbf{R} + \mathbf{W}, \tag{7.54}$$

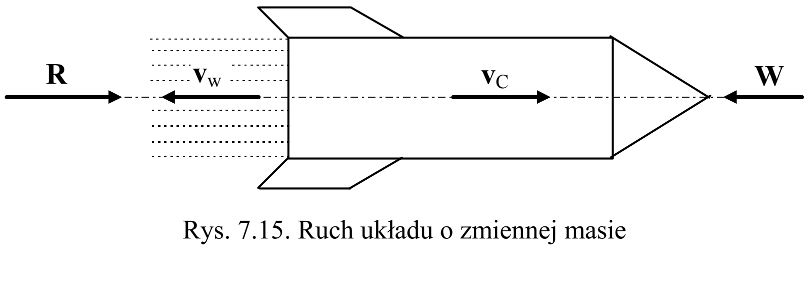
gdzie

$$\mathbf{R} = \mathbf{v}_w\frac{dm}{dt} \tag{7.55}$$

i jest reakcją cząstki elementarnej.

Jeżeli występująca we wzorze (7.55) pochodna $dm/dt > 0$, czyli masa układu wzrasta z upływem czasu, to wektor **R** ma zwrot prędkości względnej $\mathbf{v}_w$ i jest siłą hamującą. Gdy masa układu materialnego będzie maleć z upływem czasu, czyli $dm/dt < 0$, to wektor **R** będzie miał zwrot przeciwny do prędkości względnej $\mathbf{v}_w$,
a więc będzie siłą napędową.

Jeżeli równanie (7.54) zastosujemy do badania ruchu rakiety i założymy, że wektor prędkości względnej $\mathbf{v}_w$ wypływających z rakiety gazów jest styczny do trajektorii lotu, to wektor **R** będzie siłą ciągu rakiety (rys. 7.15).



Rys. 7.15. Ruch układu o zmiennej masie

Przykład 7.8. Rakieta o masie początkowej m_0 porusza się w przestrzeni międzyplanetarnej z prędkością początkową $\mathbf{v}_{C0}$. Po włączeniu silnika prędkość względna $\mathbf{v}_w$ wypływających z rakiety produktów spalania paliwa jest stała, a jej wektor jest styczny do trajektorii lotu. Wyznaczyć prędkość rakiety po zmniejszeniu się jej masy do m oraz równanie jej ruchu s = s(t).

Rozwiązanie. Ponieważ rakieta porusza się w przestrzeni międzyplanetarnej, siły zewnętrzne na nią działające można pominąć, zatem **W** = 0, a dynamiczne równanie ruchu rakiety na podstawie (7.54) po uwzględnieniu (7.55) można zapisać w postaci:

$$m\frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = \mathbf{v}_w\frac{dm}{dt} \text{ lub } \frac{d\mathbf{v}_C}{\mathbf{v}_w} = \frac{dm}{m}, \text{ lub } d\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_w\frac{dm}{m}. \tag{a}$$

Po scałkowaniu tego równania w granicach wyznaczonych przez warunki początkowe, czyli dla t = 0 $\mathbf{v}_C(0) = \mathbf{v}_{C0}$ i $m(0) = m_0$, otrzymujemy:

$$\int_{v_{co}}^{v} d\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_w\int_{m_o}^{m}\frac{dm}{m},$$

a po obliczeniu całek

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{C0} + \mathbf{v}_w \ln\frac{m}{m_0}. \tag{b}$$

Ponieważ wektory prędkości $\mathbf{v}_C$ i $\mathbf{v}_w$ działają wzdłuż jednej prostej i mają zwroty przeciwne (rys. 7.13), wektorowy wzór (b) można zapisać jednym wzorem skalarnym:

$$v_C = v_{C0} - v_w \ln\frac{m}{m_0}. \tag{c}$$

Powyższy wzór został po raz pierwszy wyprowadzony przez rosyjskiego uczonego polskiego pochodzenia K. Ciołkowskiego.

Wektorowy wzór (b) lub równoważny mu (c) przedstawia prawo zmiany prędkości rakiety. Ze wzorów tych wynika, że prędkość rakiety zależy od stosunku masy końcowej rakiety m do jej masy początkowej m_0.

Teraz wyznaczymy równanie drogi rakiety w funkcji czasu. Podstawiwszy do wzoru (c)

$$v_C = \frac{ds}{dt},$$

otrzymujemy równanie różniczkowe o postaci:

$$ds = v_{C0}dt - v_w \ln\frac{m}{m_0}dt.$$

Po scałkowaniu tego równania w granicach od s_0 do s i od 0 do t otrzymujemy równanie ruchu rakiety:

$$s = s_0 + v_{C0}t - v_w \int_0^t \ln\frac{m}{m_C}dt\,. \qquad \text{(d)}$$

Aby obliczyć występującą w tym równaniu całkę, należy znać funkcję zmiany masy w czasie. Załóżmy, że w czasie pracy silnika rakiety jej masa maleje wykładniczo według wzoru:

$$m = m_0 e^{-\alpha t}\,,$$

gdzie ♀ jest stałym współczynnikiem. W tym przypadku

$$\int_0^t \ln\frac{m}{m_0}dt = \int_0^t \ln e^{-\alpha t} = -\int_0^t tdt = -\frac{1}{2}\alpha t^2\,.$$

Po podstawieniu otrzymanego wyniku do wzoru (d) otrzymujemy równanie ruchu rakiety w funkcji czasu:

$$s = s_0 + v_{C0}t + \frac{1}{2}v_w \alpha t^2\,. \qquad \text{(e)}$$