3.6. Para sił

Linie działania dwóch sił mogą zajmować względem siebie różne położenia w przestrzeni. Mogą się pokrywać, przecinać, być równoległe lub wichrowate.

Jeżeli linie działania się pokrywają, czyli dwie siły działają wzdłuż jednej prostej, to przy równych modułach i przeciwnych zwrotach są równoważne zeru, w przeciwnym razie dają się sprowadzić do wypadkowej.

Gdy linie działania dwóch sił przecinają się, to mamy do czynienia z omówionym w p. 3.4.1 układem sił zbieżnych, które można sprowadzić do równoważnej im wypadkowej.

Dwie siły równoległe, z wyjątkiem sił o równych modułach i przeciwnych zwrotach, również można zastąpić wypadkową [7, 11].

Siły wichrowate można zawsze sprowadzić do jednej siły i pary sił [9].

Wspomnieliśmy wyżej, że dwóch sił równoległych o równych modułach i przeciwnych zwrotach nie można sprowadzić do wypadkowej. Obecnie zajmiemy się takim układem sił.

Na rysunku 3.19 przedstawiono dwie siły równoległe $\mathbf{P}$ i $\mathbf{P}'$ o równych modułach $\mathrm{P} = \mathrm{P}'$ i przeciwnych zwrotach $\mathbf{P} = -\mathbf{P}'$. Taki układ nazywamy *parą sił*. Widzimy zatem, że siły tworzące parę sił nie mają wypadkowej, ponieważ ich suma jest równa zeru, ale nie równoważą się, gdyż działając na ciało materialne, będą powodować jego obrót.

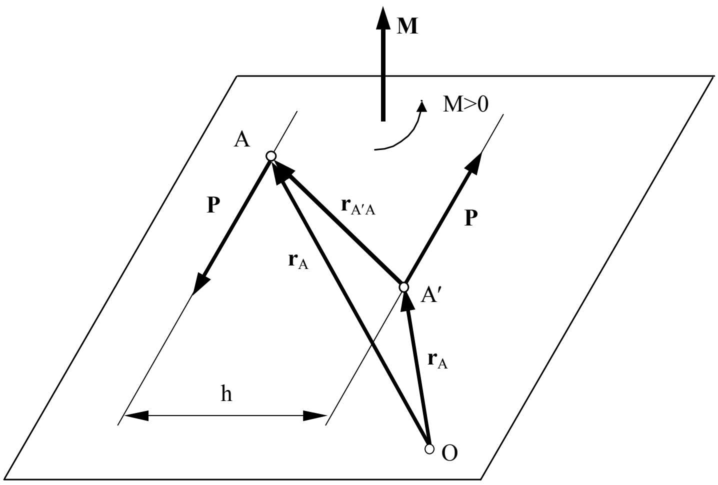
Obliczymy teraz moment pary sił względem dowolnego punktu O. Będzie on równy sumie momentów sił $\mathbf{P}$ i $\mathbf{P}'$ względem tego punktu:

$$\mathbf{M}_{\mathrm{O}}(\mathbf{P}) + \mathbf{M}_{\mathrm{O}}(\mathbf{P}') = \mathbf{r}_{\mathrm{A}} \times \mathbf{P} + \mathbf{r}_{\mathrm{A}'} \times \mathbf{P}'.$$

Po podstawieniu do tego wzoru zależności wynikającej z rysunku:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{A}} = \mathbf{r}_{\mathrm{A}'} + \mathbf{r}_{\mathrm{A}'\mathrm{A}} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{P} = -\mathbf{P}'$$

otrzymamy:



Rys. 3.19. Para sił

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{P})+\mathbf{M}_O(\mathbf{P}')=(\mathbf{r}_{A'}+\mathbf{r}_{A'A})\times\mathbf{P}+\mathbf{r}_{A'}\times(-\mathbf{P})=$$
$$=\mathbf{r}_{A'}\times\mathbf{P}+\mathbf{r}_{A'A}\times\mathbf{P}-\mathbf{r}_{A'}\times\mathbf{P}=\mathbf{r}_{A'A}\times\mathbf{P}.$$

Widzimy, że moment pary sił jest równy momentowi jednej siły względem dowolnego punktu leżącego na linii działania drugiej siły:

$$\mathbf{M}=\mathbf{r}_{A'A}\times\mathbf{P}. \tag{3.19}$$

Zatem moment pary sił nie zależy ani od punktu O, względem którego go obliczamy, ani od położenia punktów A i A' na liniach działania sił $\mathbf{P}$ i $\mathbf{P}'$, ponieważ siły można przesuwać wzdłuż linii ich działania. Moment pary sił **M** jest więc wektorem swobodnym, ponieważ nie jest związany z żadnym punktem ani z żadną prostą. Dlatego we wzorze (3.19) przy wektorze **M** pominięto indeks.

Wektor momentu pary sił **M** jest prostopadły do płaszczyzny działania obu sił, a jego zwrot określa reguła śruby prawoskrętnej. Moduł momentu pary sił na podstawie wzoru (3.36) możemy zapisać jako

$$M = Ph, \tag{3.20}$$

gdzie h nazywamy *ramieniem pary sił*.

Wartość momentu pary sił będziemy uważać za dodatnią, jeżeli patrząc od strony strzałki momentu **M**, para sił wywołuje obrót w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara; w przeciwnym razie przyjmujemy wartość ujemną.

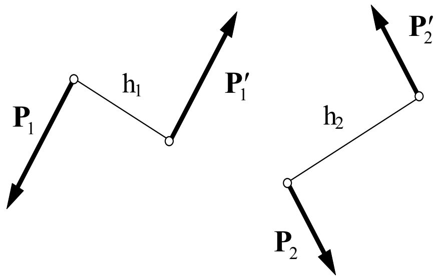
Na zakończenie tego punktu podamy bez dowodów podstawowe własności pary sił [7, 11].

1. *Dwie pary sił leżące w tej samej płaszczyźnie* (rys. 3.20) *są równoważne, gdy mają równe momenty*:

$$P_1 h_1 = P_2 h_2.$$

2. *Parę sił można przesuwać do dowolnej płaszczyzny równoległej do jej płaszczyzny działania*.

3. *Pary sił działające w jednej płaszczyźnie można zastąpić parą wypadkową o momencie* **M**, *którego wartość jest równa sumie algebraicznej wartości momentów poszczególnych par*:



Rys. 3.20. Dwie równoważne pary sił leżące w jednej płaszczyźnie

$$M = \sum_{k=1}^{n} M_k . \tag{3.21}$$

4. *Układ* n *par sił o różnych płaszczyznach działania i o momentach* $\mathbf{M}_k$ *można zastąpić parą równoważną o momencie równym sumie geometrycznej momentów par składowych*:

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}_k . \tag{3.22}$$

Ostatnia własność pozwala sformułować warunek równowagi par sił działających na ciało sztywne w różnych płaszczyznach.

Aby pary sił działające na ciało sztywne w różnych płaszczyznach znajdowały się w równowadze, suma geometryczna momentów tych par musi być równa zeru.

Warunkowi temu odpowiada wektorowy warunek równowagi:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}_k = 0. \tag{3.23}$$