2.4. Moment wektora względem punktu

Momentem wektora **a** *względem punktu* (bieguna) O nazywamy iloczyn wektorowy wektora $\mathbf{r}_A$ = **OA** o początku w punkcie O i końcu w początku wektora **a** przez wektor **a** (rys. 2.10). Moment wektora względem punktu będziemy oznaczać w następujący sposób:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{a}) = \mathbf{r}_A \times \mathbf{a}. \tag{2.35}$$

Z podanej definicji wynika, że moment wektora względem punktu ma własności wynikające z omówionego w p. 2.3.2 iloczynu wektorowego. Zatem wektor $\mathbf{M}_O(\mathbf{a})$ jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny określonej przez wektory $\mathbf{r}_A$ i **a** i ma zwrot zgodny z regułą śruby prawoskrętnej. Albo inaczej, jego zwrot jego jest taki, że dla obserwatora patrzącego z końca wektora momentu wektor **a** wywołuje obrót wokół bieguna O w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

Moment wektora względem punktu jest równy zeru, gdy wektor **a** = 0 lub wektory $\mathbf{r}_A$ i **a** są równoległe, albo linia działania wektora **a** przechodzi przez punkt O.

Obecnie zastanówmy się, jak zmieni się moment wektora względem punktu, gdy wektor **a** przesuniemy wzdłuż linii jego działania. W tym celu obliczmy moment wektora $\mathbf{a}'$ przyłożonego w punkcie A', różniącego się od wektora **a** tylko punktem przyłożenia, względem punktu O (rys. 2.10). Z definicji momentu wektora względem punktu mamy:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{a}') = \mathbf{r}_{A'} \times \mathbf{a}'.$$

Na podstawie rys. 2.10 możemy napisać:

$$\mathbf{r}_{A'} = \mathbf{r}_A + \mathbf{AA}'.$$

Po podstawieniu tej zależności do wzoru na moment wektora względem punktu otrzymamy:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{a}') = (\mathbf{r}_A + \mathbf{AA}') \times \mathbf{a}' = \mathbf{r}_A \times \mathbf{a} + \mathbf{AA}' \times \mathbf{a}'.$$

Ponieważ $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$, a iloczyn wektorowy dwóch wektorów leżących na jednej prostej jest równy zeru:

$$\mathbf{AA}' \times \mathbf{a} = 0,$$

otrzymujemy:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{a}') = \mathbf{r}_A \times \mathbf{a} = \mathbf{M}_O(\mathbf{a}).$$

Z otrzymanej zależności wynika, że moment wektora **a** względem punktu O nie ulegnie zmianie, gdy wektor przesuniemy wzdłuż linii jego działania, czyli jest on wektorem przesuwnym. Wartość momentu $\mathbf{M}_O(\mathbf{a})$ będzie zależała od położenia linii działania wektora, jego modułu oraz punktu, względem którego liczymy moment.

Odległość punktu O od linii działania wektora **a**, oznaczonej na rys. 2.10 przez h, będziemy nazywać ramieniem wektora.

Gdy wektor **a** przesuniemy do punktu A'' (rys. 2.10), to moment tego wektora:

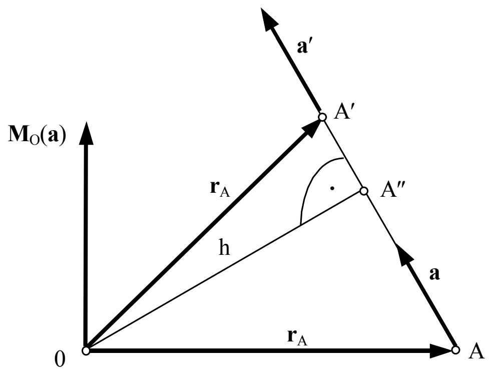
$$\mathbf{M}_O(\mathbf{a}) = \mathbf{OA''} \times \mathbf{a}.$$

Z tego wzoru wynika, że moduł momentu jest równy iloczynowi modułu wektora przez jego ramię:

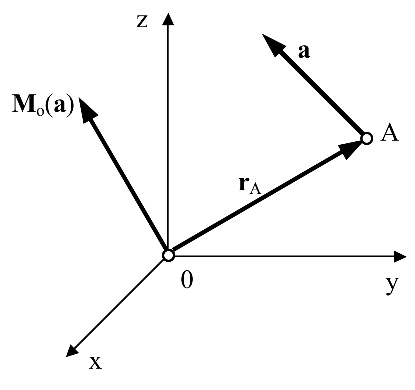
$$M_O(\mathbf{a}) = |\mathbf{M}_O(\mathbf{a})| = a\,h. \tag{2.36}$$

Moment wektora względem punktu można wyrazić za pomocą współrzędnych wektora **a** danych w prostokątnym układzie współrzędnych (rys. 2.11). Jeżeli wektory $\mathbf{r}_A$ i **a** zapiszemy za pomocą ich współrzędnych:

$$\mathbf{r}_A = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k},$$



Rys. 2.10. Moment wektora względem punktu



Rys. 2. 11. Moment wektora względem początku układu współrzędnych

to moment wektora **a** względem początku układu współrzędnych O na podstawie wzorów (2.28) i (2.27) wyraża zależność:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{a}) = \mathbf{r}_A \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

$$= (ya_z - za_y)\mathbf{i} + (za_x - xa_z)\mathbf{j} + (xa_y - ya_x)\mathbf{k}. \tag{2.37}$$

Po zapisaniu momentu w postaci:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{a}) = M_{Ox}\,\mathbf{i} + M_{Oy}\,\mathbf{j} + M_{Oz}\,\mathbf{k}$$

i podstawieniu do wzoru (2.37) otrzymamy wzory na współrzędne wektora $\mathbf{M}_O(\mathbf{a})$:

$$\left.\begin{aligned} M_{Ox} &= ya_z - za_y, \\ M_{Oy} &= za_x - xa_z, \\ M_{Oz} &= xa_y - ya_x. \end{aligned}\right\} \tag{2.38}$$