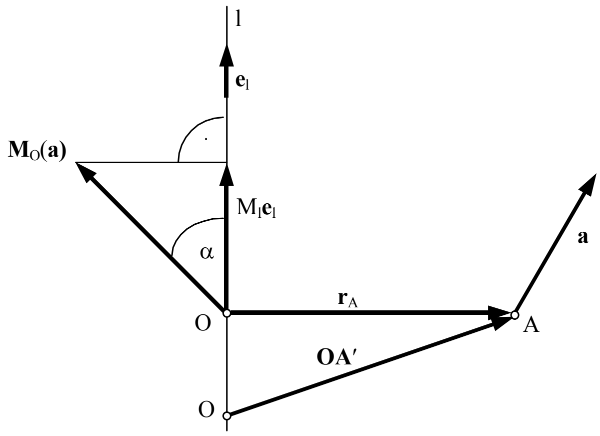
2.5. Moment wektora względem osi

Zajmiemy się obecnie zdefiniowaniem wielkości będącej miarą działania obrotowego wektora względem osi. Wielkość tę nazywamy *momentem wektora względem osi*. W tym celu przyjmiemy, że dany jest dowolny wektor **a** oraz oś l, której kierunek jest określony przez wektor jednostkowy $\mathbf{e}_l$ (rys. 2.12).

Momentem wektora **a** *względem osi* l *nazywamy rzut na tę oś momentu tego wektora względem dowolnego punktu* O *tej osi:*

$$M_l = M_l(\mathbf{a}) = Rz_l[\mathbf{M}_O(\mathbf{a})] = M_O(\mathbf{a})\cos\alpha. \qquad (2.39)$$



Rys. 2.12. Moment wektora względem osi

Na podstawie wzoru (2.15) moment wektora względem osi możemy przedstawić w postaci iloczynu skalarnego momentu wektora względem punktu i wersora osi:

$$M_l = \mathbf{M}_O(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_l.$$

Ponieważ moment wektora względem punktu jest równy iloczynowi wektorowemu:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{a}) = \mathbf{r}_A \times \mathbf{a},$$

moment wektora względem osi można zapisać w postaci iloczynu mieszanego:

$$M_l = (\mathbf{r}_A \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_l. \qquad (2.40)$$

Tak zdefiniowany moment wektora względem osi jest skalarem. Definicja ta jest wystarczająca, ponieważ wektor $M_l(\mathbf{a})\mathbf{e}_l$ jest skierowany wzdłuż osi l, przeto do jego opisu wystarczy podanie tylko jego wartości.

Aby podana na wstępie definicja momentu względem osi była jednoznaczna, należy wykazać, że rzut na oś l momentu wektora **a** względem punktu O leżącego na tej osi nie zależy od położenia punktu O na tej osi. W tym celu obliczymy moment wektora **a** względem innego punktu O' leżącego na osi l (rys. 2.12) i dokonamy jego rzutu na tę oś:

$$\mathrm{Rz}_l\left[\mathbf{M}_{O'}(\mathbf{a})\right] = \mathbf{M}_{O'}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_l . \tag{a}$$

Na podstawie rys. 2.12 wektor $\mathbf{O'A}$ możemy przedstawić jako sumę wektora $\mathbf{O'O}$ i $\mathbf{r}_A$:

$$\mathbf{O'A} = \mathbf{O'O} + \mathbf{r_A} .$$

Po podstawieniu tej zależności do wzoru (a) oraz skorzystaniu z własności iloczynu mieszanego otrzymamy:

$$\mathrm{Rz}_l\left[\mathbf{M}_{O'}(\mathbf{a})\right] = \left[(\mathbf{O'O} + \mathbf{r_A}) \times \mathbf{a}\right] \cdot \mathbf{e}_l = (\mathbf{O'O} \times \mathbf{a} + \mathbf{r_A} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_l =$$
$$= (\mathbf{O'O} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_l + (\mathbf{r}_A \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_l = (\mathbf{e}_l \times \mathbf{O'O}) \cdot \mathbf{a} + (\mathbf{r}_A \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_l .$$

Ponieważ wektory $\mathbf{e}_l$ i $\mathbf{O'O}$ są równoległe, ich iloczyn wektorowy jest równy zeru: $\mathbf{e}_l \times \mathbf{O'O} = 0$, ostatecznie otrzymujemy:

$$\mathrm{Rz}_l\left[\mathbf{M}_{O'}(\mathbf{a})\right] = (\mathbf{r}_A \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_l = \mathrm{Rz}_l\left[\mathbf{M}_O(\mathbf{a})\right],$$

czyli rzut na oś momentu wektora względem punktu na osi nie zależy od położenia punktu na osi.

Z definicji momentu względem osi wynika, że będzie on równy zeru, jeżeli moment $\mathbf{M}_O(\mathbf{a})$ będzie równy zeru lub jego rzut na oś będzie równy zeru. Będzie tak, gdy kierunek wektora **a** będzie przecinał oś l lub będzie do niej równoległy.

Z określenia momentu wektora względem osi możemy zauważyć, że rzuty momentu $\mathbf{M}_O(\mathbf{a})$ wektora **a** względem początku układu współrzędnych O (rys. 2.11) na osie prostokątnego układu współrzędnych są równocześnie momentami tego wektora względem osi x, y, z. Na podstawie wzorów (2.38) momenty wektora **a** względem osi x, y, z będą opisane równaniami:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= M_{Ox} = ya_z - za_y, \\ M_y &= M_{Oy} = za_x - xa_z, \\ M_z &= M_{Oz} = xa_y - ya_x. \end{aligned}\right\} \tag{2.41}$$

W oparciu o powyższe wzory można podać drugi sposób obliczania momentu wektora względem osi. Na przykład z pierwszego wzoru wynika, że aby obliczyć moment względem osi x, należy wektor **a** zrzutować na płaszczyznę yz, czyli płaszczyznę prostopadłą do osi x, i obliczyć moment wektora, będącego rzutem wektora na tę płaszczyznę, względem punktu O, czyli punktu przebicia płaszczyzny yz przez oś x. Wartość tak obliczonego momentu jest momentem wektora względem osi. Podobne wnioski wynikają z dwóch pozostałych wzorów (2.41). Na podstawie powyższego można podać drugą definicję momentu wektora względem osi.

Momentem wektora **a** *względem* osi *l nazywamy moduł momentu wektora równego rzutowi wektora* **a** *na płaszczyznę prostopadłą do osi l względem punktu przebicia płaszczyzny przez tę oś.*

Przykład 2.1. Dany jest wektor: $\mathbf{a} = -2\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j} - 10\,\mathbf{k}$, zaczepiony w punkcie A o współrzędnych x = 2, y = 3, z = 5. Obliczyć momenty tego wektora względem każdej osi układu współrzędnych.

Rozwiązanie. Zgodnie z podaną na wstępie definicją momentu wektora względem osi obliczymy najpierw moment wektora względem początku O układu współrzędnych. Współrzędne tego momentu będą – na podstawie wzorów (2.41) – szukanymi momentami wektora **a** względem osi x, y, z. Ponieważ

$$\mathbf{OA} = \mathbf{r}_A = 2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k},$$

na podstawie wzoru (2.37) otrzymujemy:

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 5 & -10 \end{vmatrix} = -55\,\mathbf{i} + 10\,\mathbf{j} + 16\,\mathbf{k}.$$

Momenty wektora **a** względem osi układu współrzędnych są więc następujące:

$$M_x = M_{Ox} = -55, \quad M_y = M_{Oy} = 10, \quad M_z = M_{Oz} = 16.$$

Przykład ten można rozwiązać z wykorzystaniem drugiej definicji momentu wektora względem punktu, podanej wyżej. Czytelnikowi pozostawiamy rozwiązanie przykładu tą metodą.