

4.4. Momenty statyczne mas

Założmy, że mamy układ n punktów materialnych o masach m_k , których położenie względem dowolnego punktu O określają promienie wodzące \mathbf{r}_k (rys. 4.1). Rozkład mas tego układu materialnego względem przyjętego punktu O charakteryzują momenty pierwszego rzędu, nazywane *momentami statycznymi*.

Momentem statycznym \mathbf{S} układu punktów materialnych względem dowolnego punktu O nazywamy sumę iloczynów mas m_k przez ich promienie wodzące \mathbf{r}_k .

$$\mathbf{S} = \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k m_k . \quad (4.18)$$

Tak zdefiniowany moment statyczny jest wektorem. Po podstawieniu do tego wzoru wektora \mathbf{r}_k zapisanego za pomocą współrzędnych prostokątnych:

$$\mathbf{r}_k = x_k \mathbf{i} + y_k \mathbf{j} + z_k \mathbf{k}$$

wektor \mathbf{S} wyrazi wzór:

$$\mathbf{S} = \sum_{k=1}^n x_k m_k \mathbf{i} + \sum_{k=1}^n y_k m_k \mathbf{j} + \sum_{k=1}^n z_k m_k \mathbf{k} . \quad (4.19)$$

Współrzędne tego wektora nazywamy *momentami statycznymi względem płaszczyzn yz , zx i xy* , które oznaczymy odpowiednio przez S_{yz} , S_{zx} i S_{xy} .

$$S_{yz} = \sum_{k=1}^n x_k m_k , \quad S_{zx} = \sum_{k=1}^n y_k m_k , \quad S_{xy} = \sum_{k=1}^n z_k m_k . \quad (4.20)$$

Momentem statycznym układu punktów materialnych względem dowolnej płaszczyzny nazywamy sumę iloczynów mas punktów przez ich odległości od tej płaszczyzny.

Aby otrzymać moment statyczny bryły względem punktu, dzielimy bryłę na n elementów o masach Δm_k (rys. 4.2). Jeżeli założymy, że liczba elementów n dąży do nieskończoności, a ich masa do zera, zamiast wzoru (4.18) otrzymamy całkę rozciągniętą na całą masę m . Moment statyczny bryły względem początku układu O wyraża wzór:

$$\mathbf{S} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \Delta m_k = \int_m \mathbf{r} dm. \quad (4.21)$$

Z kolei momenty statyczne bryły względem poszczególnych płaszczyzn prostokątnego układu współrzędnych będą dane wzorami:

$$S_{yz} = \int_m x dm, \quad S_{zx} = \int_m y dm, \quad S_{xy} = \int_m z dm. \quad (4.22)$$

Z porównania wzoru (4.21) ze wzorem (4.7) na promień wodzący \mathbf{r}_C środka masy (ciężkości) oraz wzorów (4.22) ze wzorami (4.8) na współrzędne środka masy wynika, że całki występujące w licznikach wzorów (4.7) i (4.8) są momentami statycznymi. W pierwszym przypadku jest to moment statyczny względem początku układu współrzędnych O , a w drugim są to momenty statyczne względem płaszczyzn yz , zx i xy . Zatem wzory (4.7) i (4.8) na promień wodzący \mathbf{r}_C środka masy C i jego współrzędne x_C , y_C , z_C możemy wyrazić za pomocą momentów statycznych:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\mathbf{S}}{m}, \quad (4.23)$$

$$x_C = \frac{S_{yz}}{m}, \quad y_C = \frac{S_{zx}}{m}, \quad z_C = \frac{S_{xy}}{m}. \quad (4.24)$$

Znając położenie środka masy C bryły lub układu materialnego, odpowiednie momenty statyczne możemy wyznaczyć z powyższych wzorów. Otrzymamy wtedy:

$$\mathbf{S} = \mathbf{r}_C m, \quad (4.25)$$

$$S_{yz} = x_C m, \quad S_{zx} = y_C m, \quad S_{xy} = z_C m. \quad (4.26)$$

Wzory (4.25) i (4.26) zostały wyprowadzone dla bryły, jednak do analogicznych wzorów dojdziemy, prowadząc podobne rozważania dla układu punktów materialnych. Stąd wynikające z tych wzorów wnioski będą dotyczyły również momentów statycznych układu punktów materialnych. Oto one:

a) Moment statyczny bryły lub układu punktów materialnych względem dowolnego punktu jest równy momentowi statycznemu masy całkowitej skupionej w środku masy (ciężkości) względem tego punktu.

b) Moment statyczny bryły lub układu punktów materialnych względem dowolnej płaszczyzny jest równy momentowi statycznemu masy całkowitej skupionej w środku masy (ciężkości) względem tej płaszczyzny.

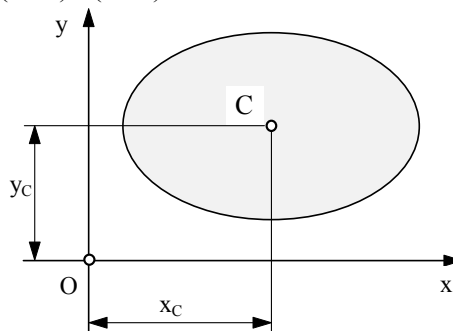
c) Moment statyczny bryły lub układu punktów materialnych względem środka masy (ciężkości) jest równy zeru.

d) Moment statyczny bryły lub układu punktów materialnych względem płaszczyzny przechodzącej przez środek masy (ciężkości) jest równy zeru.

Analogicznie do momentów statycznych mas (masowych momentów statycznych) wprowadza się pojęcie momentów statycznych objętości brył, powierzchni i linii. Momenty statyczne objętości, powierzchni i linii względem płaszczyzn prostokątnego układu współrzędnych są całkami występującymi odpowiednio w licznikach wzorów (4.12), (4.13) i (4.15).

Na szczególną uwagę zasługują momenty statyczne powierzchni figur płaskich względem osi, ponieważ mają duże zastosowanie w wytrzymałości materiałów. Całki występujące w licznikach wzorów są momentami statycznymi figury płaskiej względem osi y i x (rys. 4.8):

$$S_y = \int_F x dF, \quad S_x = \int_F y dF. \quad (4.27)$$



Rys. 4.8. Wyznaczanie położenia środka

Po takich oznaczeniach wzory (4.14) na współrzędne środka ciężkości figury płaskiej można zapisać w następujący sposób:

$$x_c = \frac{S_y}{F}, \quad y_c = \frac{S_x}{F}. \quad (4.28)$$

Stąd gdy znamy współrzędne środka ciężkości, możemy wyznaczyć momenty statyczne:

$$S_x = y_c F, \quad S_y = x_c F, \quad (4.29)$$

gdzie F jest polem całkowitym powierzchni figury płaskiej