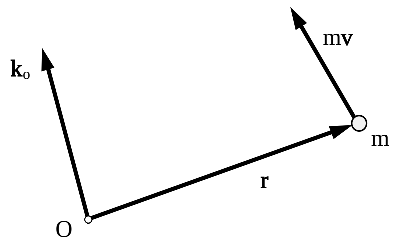
7.3.1. Definicja krętu i kręt układu materialnego

Krętem $\mathbf{k}_O$ *punktu materialnego o masie* m *względem punktu* O *nazywamy moment pędu* $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$ *tego punktu materialnego względem punktu* O:

$$\mathbf{k}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\,\mathbf{v}. \tag{7.56}$$

Z powyższej definicji wynika, że kręt – zdefiniowany podobnie jak moment siły względem punktu – jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez punkt O i wektor prędkości **v** (rys. 7.16).



Rys. 7.16. Kręt (moment pędu) punktu materialnego

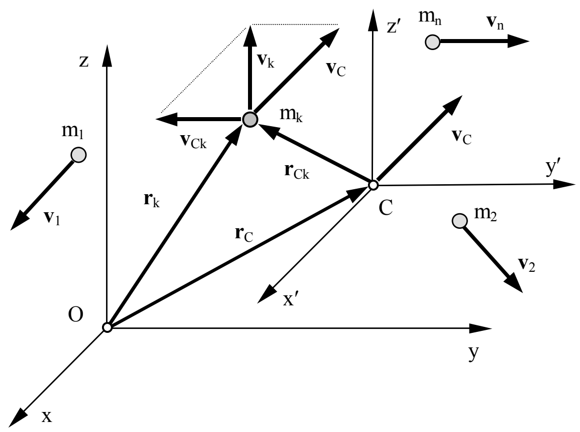
Kręt punktu będzie równy zeru, poza przypadkami trywialnymi (**r** = 0 i **v** = 0), gdy wektory **r** i **v** będą współliniowe.

Jeżeli będziemy mieli układ n punktów materialnych o masach m_k opisanych wektorami wodzącymi $\mathbf{r}_k$ i poruszających się z prędkością $\mathbf{v}_k$ (rys. 7.17), to kręt tego układu materialnego względem nieruchomego punktu O będzie równy sumie krętów (sumie momentów pędów) poszczególnych punktów materialnych względem tego punktu.

$$\mathbf{k}_O = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{p}_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times m_k\,\mathbf{v}_k\,. \tag{7.57}$$

7.3.2. Redukcja krętu do środka masy

Wzór (7.57) opisuje kręt układu materialnego obliczony względem dowolnego nieruchomego punktu O. Zadajmy sobie pytanie, jaki będzie kręt tego samego układu materialnego względem środka masy C. W tym celu przyjmijmy w środku masy C początek ruchomego układu współrzędnych o osiach x', y', z' równoległych do odpowiednich osi nieruchomego układu współrzędnych x, y, z (rys. 7.17). W tej sytuacji układ x', y', z' będzie się poruszał ruchem postępowym względem układu nieruchomego x, y, z z prędkością środka masy $\mathbf{v}_C$.



Rys. 7.17. Rozkład prędkości układu punktów materialnych

Przy takim założeniu prędkość bezwzględna $\mathbf{v}_k$ każdego punktu materialnego względem układu nieruchomego x, y, z będzie sumą prędkości unoszenia równej prędkości środka masy $\mathbf{v}_C$ i prędkości względnej $\mathbf{v}_{Ck}$ wzgędem układu ruchomego x', y', z', nazywanej dalej prędkością względem środka masy:

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{Ck}\,. \tag{a}$$

Kręt rozpatrywanego układu punktów materialnych względem środka masy wyrazi wzór:

$$\mathbf{k}_C = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_{Ck} \times m_k\, \mathbf{v}_k\,, \tag{7.58}$$

gdzie $\mathbf{r}_{Ck}$ jest promieniem wodzącym punkt materialny o masie m_k w układzie x', y', z'. Z rysunku 7.17 wynika, że promień wodzący $\mathbf{r}_k$ jest równy sumie promienia wodzącego środka masy $\mathbf{r}_C$ i promienia $\mathbf{r}_{Ck}$:

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_C + \mathbf{r}_{Ck}\,.$$

Po wyznaczeniu z tej zależności

$$\mathbf{r}_{Ck} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_C$$

i podstawieniu do wzoru (7.58) otrzymamy:

$$\mathbf{k}_C = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{r_k} - \mathbf{r}_C) \times m_k \, \mathbf{v_k} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r_k} \times m_k \, \mathbf{v_k} - \mathbf{r}_C \times \sum_{k=1}^{n} m_k \, \mathbf{v_k} \, . \tag{b}$$

Pierwsza suma po prawej stronie tego wzoru, zgodnie ze wzorem (7.57), jest krętem $\mathbf{k}_O$ względem nieruchomego punktu O, druga zaś jest pędem omawianego układu materialnego. Na podstawie wzoru (7.42) możemy zapisać:

$$\mathbf{p} = \sum_{k=1}^{n} m_k \, \mathbf{v_k} = m \, \mathbf{v}_C \, ,$$

gdzie m jest masą całego układu. Zatem równanie (b) przyjmie postać:

$$\mathbf{k}_C = \mathbf{k}_O - \mathbf{r}_C \times m\mathbf{v}_C$$

lub

$$\mathbf{k}_O = \mathbf{k}_C + \mathbf{r}_C \times m\mathbf{v}_C \, . \tag{7.59}$$

Kręt $\mathbf{k}_O$ układu punktów materialnych względem dowolnego nieruchomego punktu O jest równy krętowi $\mathbf{k}_C$ tego układu względem środka masy powiększonemu o kręt $\mathbf{r}_C \times m\mathbf{v}_C$ masy całkowitej skupionej w środku masy.

Wzór (7.58) przedstawia kręt układu materialnego względem środka masy obliczony dla ruchu bezwzględnego, ponieważ występująca w tym wzorze prędkość $\mathbf{v}_k$ jest prędkością względem nieruchomego układu odniesienia. Zastanówmy się, czemu będzie równy kręt tego układu materialnego względem środka masy wyznaczony dla ruchu względnego. W tym celu podstawmy do wzoru (7.58) zależność (a).

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_C &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_{Ck} \times m_k \, \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_{Ck} \times m_k (\mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{Ck}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_{Ck} \times m_k \, \mathbf{v}_C + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_{Ck} \times m_k \, \mathbf{v}_{Ck} = \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_{Ck} \, m_k \right) \times \mathbf{v}_C + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_{Ck} \times m_k \, \mathbf{v}_{Ck} = -\mathbf{v}_C \times \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_{Ck} \, m_k + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_{Ck} \times m_k \, \mathbf{v}_{Ck} \, .\end{aligned}$$

Ale suma

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_{Ck} \, m_k = 0 \, ,$$

ponieważ moment statyczny układu względem środka masy jest równy zeru. Ostatecznie mamy:

$$\mathbf{k}_C = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_{Ck} \times m_k \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_{Ck} \times m_k \mathbf{v}_{Ck} . \qquad (7.60)$$

Z otrzymanej zależności wynika stwierdzenie:

Kręt układu punktów materialnych względem środka masy wyznaczony dla ruchu bezwzględnego jest równy krętowi względem środka masy wyznaczonemu dla ruchu względnego.

7.3.3. Kręt bryły

Wyznaczmy kręt bryły o masie m poruszającej się ruchem dowolnym, a więc bryły swobodnej. Podobnie jak w kinematyce bryły (p. 5.3.2) przyjmiemy dwa układy współrzędnych – jeden nieruchomy o początku w nieruchomym punkcie O i osiach x, y, z, a drugi ruchomy, sztywno związany z bryłą o osiach x', y', z' (rys. 7.18) i początku nie w dowolnym punkcie O', lecz w środku masy C. W bryle wydzielmy myślowo element masy dm o wektorze wodzącym

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_C + \mathbf{r}', \tag{c}$$

gdzie

$$\mathbf{r}_C = x_C\,\mathbf{i} + y_C\,\mathbf{j} + z_C\,\mathbf{k},$$
$$\mathbf{r}' = x'\,\mathbf{i}' + y'\,\mathbf{j}' + z'\,\mathbf{k}'.$$

Znając prędkość $\mathbf{v}_C$ środka masy C i prędkość kątową $\boldsymbol{\omega}$, możemy obliczyć prędkość $\mathbf{v}$ dowolnego punktu bryły (wzór 5.32). Zatem prędkość elementarnej masy dm

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'. \tag{d}$$

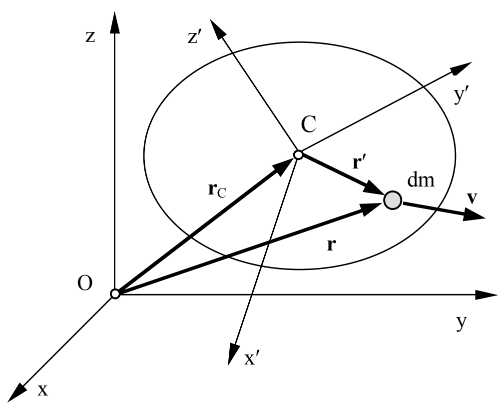
Zgodnie z definicją kręt elementu masy dm względem nieruchomego punktu O

$$d\,\mathbf{k}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{v}\,dm.$$

Kręt bryły będzie równy całce z powyższej zależności rozciągniętej na całą masę m bryły:

$$\mathbf{k}_O = \int_m \mathbf{r} \times \mathbf{v}\,dm.$$

Po podstawieniu do tego wzoru zależności (c) i (d) otrzymamy:



Rys. 7.18. Opis położenia dowolnego elementu bryły sztywnej

$$\mathbf{k}_O = \int_m (\mathbf{r}_C + \mathbf{r}') \times (\mathbf{v}_C + \omega \times \mathbf{r}')dm = \int_m \mathbf{r}_C \times \mathbf{v}_C\,dm + \int_m \mathbf{r}_C \times (\omega \times \mathbf{r}')dm +$$
$$+ \int_m \mathbf{r}' \times \mathbf{v}_C\,dm + \int_m \mathbf{r}' \times (\omega \times \mathbf{r}')dm.$$

Występujące pod całkami wielkości $\mathbf{r}_C$, $\mathbf{v}_C$ i $\boldsymbol{\omega}$ nie podlegają całkowaniu i mogą być wyciągnięte przed znaki całek:

$$\mathbf{k}_O = \mathbf{r}_C \times \mathbf{v}_C \int_m \mathrm{dm} + \mathbf{r}_C \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \int_m \mathbf{r}' \mathrm{dm} \right) - \mathbf{v}_C \times \int_m \mathbf{r}' \mathrm{dm} + \int_m \mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \mathrm{dm}.$$

Dwie środkowe całki są momentami statycznymi bryły względem środka masy, a więc są równe zeru:

$$\int_m \mathbf{r}' \mathrm{dm} = 0,$$

a pierwsza całka jest masą całkowitą bryły:

$$\mathrm{m} = \int_m \mathrm{dm}.$$

Ostatecznie kręt bryły możemy zapisać w postaci:

$$\mathbf{k}_O = \int_m \mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \mathrm{dm} + \mathbf{r}_C \times \mathrm{m}\, \mathbf{v}_C . \tag{7.61}$$

Całka występująca w tym wzorze jest krętem $\mathbf{k}_C$ bryły w jej ruchu względem środka masy C z prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$.

$$\mathbf{k}_C = \int_m \mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \mathrm{dm} . \tag{7.62}$$

Zatem wzór (7.61) możemy zapisać w postaci:

$$\mathbf{k}_O = \mathbf{k}_C + \mathbf{r}_C \times \mathrm{m}\, \mathbf{v}_C . \tag{7.63}$$

Kręt $\mathbf{k}_O$ bryły względem dowolnego nieruchomego punktu O jest równy krętowi $\mathbf{k}_C$ bryły względem środka masy C (w jej ruchu względem środka masy z prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$) powiększonemu o kręt $\mathbf{r}_C \times \mathrm{m}\mathbf{v}_C$ masy m bryły poruszającej się z prędkością $\mathbf{v}_C$ środka masy.

Obecnie obliczymy współrzędne wektora $\mathbf{k}_C$ w ruchomym układzie współrzędnych x', y', z' o początku w środku masy C (rys. 7.18). W tym układzie współrzędnych wektory występujące we wzorze (7.62) mają następujące współrzędne:

$$\mathbf{k}_C = k_{Cx'}\, \mathbf{i}' + k_{Cy'}\, \mathbf{j}' + k_{Cz'}\, \mathbf{k}',$$

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}',$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_{x'}\,\mathbf{i}' + \omega_{y'}\,\mathbf{j}' + \omega_{z'}\,\mathbf{k}'.$$

Po rozpisaniu podwójnego iloczynu wektorowego ze wzoru (7.62), zgodnie ze wzorem (2.34) otrzymamy:

$$\mathbf{k}_C = \boldsymbol{\omega}\int_m \mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'\,dm - \int_m \mathbf{r}'(\mathbf{r}'\cdot\boldsymbol{\omega})dm = \boldsymbol{\omega}\int_{\mathbf{m}} (r')^2\,dm - \int_m (\mathbf{r}'\cdot\boldsymbol{\omega})\mathbf{r}'dm.$$

Pierwsza całka występująca po prawej stronie powyższego równania jest biegunowym momentem bezwładności względem środka masy C:

$$I_C = \int_m (r')^2\,dm\,,$$

a więc

$$\mathbf{k}_C = \boldsymbol{\omega}\,I_C - \int_m (\mathbf{r}'\cdot\boldsymbol{\omega})\mathbf{r}'dm\,. \qquad (7.64)$$

Współrzędne krętu $\mathbf{k}_C$ otrzymamy po zrzutowaniu tego wektora na osie x', y', z':

$$k_{Cx'} = \mathbf{k}_C\cdot\mathbf{i}' = \omega_{x'}I_C - \int_m (\mathbf{r}'\cdot\boldsymbol{\omega})x'dm,$$
$$k_{Cy'} = \mathbf{k}_C\cdot\mathbf{j}' = \omega_{y'}I_C - \int_m (\mathbf{r}'\cdot\boldsymbol{\omega})y'dm,$$
$$k_{Cz'} = \mathbf{k}_C\cdot\mathbf{k}' = \omega_{z'}I_C - \int_m (\mathbf{r}'\cdot\boldsymbol{\omega})z'dm.$$

Po podstawieniu do tych wzorów iloczynu skalarnego:

$$\mathbf{r}'\cdot\boldsymbol{\omega} = x'\omega_{x'} + y'\omega_{y'} + z'\omega_{z'}$$

oraz wyłączeniu przed całki współrzędnych prędkości kątowej otrzymujemy:

$$k_{Cx'} = \omega_{x'}I_C - \omega_{x'}\int_m (x')^2\,dm - \omega_{y'}\int_m x'y'dm - \omega_{z'}\int_m z'x'dm,$$
$$k_{Cy'} = \omega_{y'}I_C - \omega_{x'}\int_m x'y'dm - \omega_{y'}\int_m (y')^2\,dm - \omega_{z'}\int_m y'z'dm,$$
$$k_{Cz'} = \omega_{z'}I_C - \omega_{x'}\int_m z'x'dm - \omega_{y'}\int_m y'z'dm - \omega_{z'}\int (z')^2\,dm.$$

Całki występujące w powyższych wzorach są zdefiniowanymi w p. 6.1.2 momentami bezwładności bryły względem odpowiednich płaszczyzn i momentami dewiacyjnymi. Po wykorzystaniu zależności (6.7) i (6.9) między momentami bezwładności względem bieguna, płaszczyzn i osi oraz odpowiednim uporządkowaniu wyrazów współrzędne krętu $\mathbf{k}_C$ bryły opisują wzory:

$$\left.\begin{aligned} k_{Cx'} &= \omega_{x'} I_{x'} - \omega_{y'} D_{x'y'} - \omega_{z'} D_{z'x'}, \\ k_{Cy'} &= -\omega_{x'} D_{x'y'} + \omega_{y'} I_{y'} - \omega_{z'} D_{y'z'}, \\ k_{Cz'} &= -\omega_{x'} D_{z'x'} - \omega_{y'} D_{y'z'} + \omega_{z'} I_{z'}. \end{aligned}\right\} \tag{7.65}$$

Z powyższych wzorów wynika, że do obliczenia krętu $\mathbf{k}_C$ bryły swobodnej względem środka masy C musimy znać wszystkie osiowe momenty bezwładności i wszyskie momenty dewiacyjne, czyli tensor bezwładności. Wzory (7.65) znacznie się upraszczają, gdy osie x', y', z' są głównymi centralnymi osiami bezwładności. W tym przypadku, jak wiadomo z p. 6.5, wszystkie momenty dewiacyjne są równe zeru i kręt

$$\mathbf{k}_C = \omega_{x'} I_{x'}\, \mathbf{i}' + \omega_{y'} I_{y'}\, \mathbf{j}' + \omega_{z'} I_{z'}\, \mathbf{k}'. \tag{7.66}$$

Jeżeli założymy, że osią obrotu bryły jest np. oś z', to prędkość kątowa $\boldsymbol{\omega}$ pokryje się z osią obrotu:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_{z'}\, \mathbf{k}' = \omega \mathbf{k}'.$$

Wówczas kręt wyznaczony ze wzorów (7.65) ma postać:

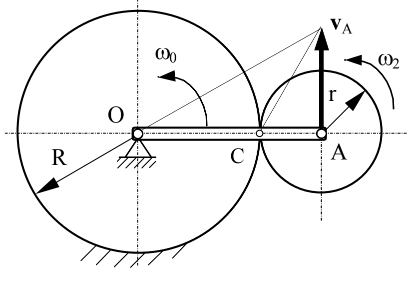
$$\mathbf{k}_C = -\omega D_{z'x'}\, \mathbf{i}' - \omega D_{y'z'}\, \mathbf{j}' + \omega I_{z'}\, \mathbf{k}', \tag{7.67}$$

a na podstawie wzoru (7.66)

$$\mathbf{k}_C = \omega_z I_{z'}\, \mathbf{k}'. \tag{7.68}$$

Z porównania wzorów (7.67) i (7.68) wynika, że jeżeli oś obrotu jest główną centralną osią bezwładności, to wektor krętu leży na tej osi; gdy tak nie jest, kierunek wektora krętu nie pokrywa się z osią obrotu.

Przykład 7.9. Korba OA o masie $m_1 = m$ obraca się z prędkością kątową ω_0 wokół osi z przechodzącej przez punkt O i prostopadłej do płaszczyzny rys. 7.19. Na końcu A korby jest osadzona cienka jednorodna tarcza o masie $m_2 = 2m$ i promieniu r, która toczy się bez poślizgu po nieruchomym kole o promieniu R. Wyznaczyć kręt układu względem osi z. Korbę OA uważać za pręt jednorodny.



Rys. 7.19. Wyznaczenie krętu układu

Rozwiązanie. Kręt układu względem osi z składa się z krętu k_{1z} korby OA poruszającej się ruchem obrotowym wokół osi z oraz krętu k_{2z} tarczy poruszającej się ruchem postępowym środka ciężkości A tarczy z prędkością $\mathbf{v}_A$ oraz ruchem obrotowym z prędkością ω_2 względem osi z' równoległej do osi z i przechodzącej przez środek tarczy:

$$k_z = k_{1z} + k_{2z}. \tag{a}$$

Kręt korby OA względem osi z

$$k_{1z} = I_z \omega_0. \tag{b}$$

Kręt tarczy względem tej samej osi na podstawie wzoru (7.63) możemy wyrazić zależnością:

$$k_{2z} = I_{z'}\omega_2 + (R + r)m_2 v_A. \tag{c}$$

We wzorach (b) i (c) I_z i $I_{z'}$ są odpowiednio momentami bezwładności korby względem osi z przechodzącej przez punkt O i tarczy względem osi z' przechodzącej przez jej środek A. Zgodnie ze wzorami (f) i (a) z przykładu 6.2:

$$I_z = \frac{1}{3}m_1(R + r)^2 = \frac{1}{3}m(R + r)^2, I_{z'} = \frac{1}{2}m_2 r^2 = mr^2. \tag{d}$$

Prędkość środka tarczy

$$v_A = (R + r)\omega_0. \tag{e}$$

Ponieważ punkt C (rys. 7.19) styku tarczy z nieruchomym kołem jest chwilowym środkiem obrotu tarczy, mamy również:

$$v_A = \omega_2 r, \text{ stąd } \omega_2 = \frac{v_A}{r} = \frac{(R + r)}{r}\omega_0. \tag{f}$$

Po uwzględnieniu w związkach (b) i (c) wzorów (d), (e) i (f) oraz po ich podstawieniu do równania (a) otrzymujemy kręt układu względem osi z.

$$k_z = \frac{1}{3}m(R + r)^2\omega_0 + mr^2\frac{(R + r)}{r}\omega_0 + 2m(R + r)(R + r)\omega_0 =$$
$$= \frac{1}{3}m(R + r)(7R + 10r)\omega_0.$$

7.3.4. Zasada krętu i pokrętu. Zasada zachowania krętu

Załóżmy, że mamy układ materialny składający się z n punktów materialnych o masach m_k poruszających się z prędkością $\mathbf{v}_k$ (rys. 7.17). Na każdy punkt niech działa siła zewnętrzna $\mathbf{P}_k$ oraz siły wewnętrzne $\mathbf{F}_{kl}$. Zgodnie z drugim prawem Newtona możemy dla dowolnego punktu rozważanego układu materialnego napisać dynamiczne równanie ruchu:

$$m_k \frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2} = \mathbf{P}_k + \mathbf{P}_{\mathbf{wk}}$$

lub

$$m_k \frac{d\,\mathbf{v}_k}{dt} = \mathbf{P}_k + \mathbf{P}_{\mathbf{wk}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

W powyższym równaniu zgodnie ze wzorem (7.45) $\mathbf{P}_{wk}$ jest wypadkową sił wewnętrznych działających na punkt o masie m_k. Pomnóżmy wektorowo każde z n równań obustronnie przez wektor wodzący $\mathbf{r}_k$ i dodajmy wszystkie równania stronami. Otrzymamy:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times m_k \frac{d\,\mathbf{v}_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \left(\mathbf{P}_k + \mathbf{P}_{wk}\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{P}_k + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{P}_{wk}\,. \tag{e}$$

Druga suma po prawej stronie tego równania jest sumą momentów sił wewnętrznych względem punktu O i jak wykazano w p. 7.1.4 (wzór 7.13), jest równa zeru. Z kolei suma momentów sił zewnętrznych względem punktu O jest równa momentowi głównemu (3.26):

$$\mathbf{M}_o = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times \mathbf{P}_k\,.$$

Sumę występującą po lewej stronie równania (e) możemy przekształcić:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times m_k \frac{d\,\mathbf{v}_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(\mathbf{v}_k \times \mathbf{v}_k + \mathbf{r}_k \times \frac{d\,\mathbf{v}_k}{dt} \right) = \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}_k \times m_k\,\mathbf{v}_k\right) = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}_k \times m_k\,\mathbf{v}_k = \frac{d\,\mathbf{k}_O}{dt}.$$

Wynika z tego, że lewa strona równania (e) jest pochodną krętu całego układu materialnego względem nieruchomego punktu O. Ostatecznie otrzymujemy:

$$\frac{d\mathbf{k}_O}{dt} = \mathbf{M}_O . \tag{7.69}$$

Otrzymana zależność różniczkowa jest *zasadą krętu*.

Pochodna względem czasu krętu układu punktów materialnych względem dowolnego nieruchomego punktu jest równa momentowi głównemu wszystkich sił zewnętrznych względem tego samego punktu.

Po obustronnym scałkowaniu równania (7.69) w granicach od 0 do t otrzymamy:

$$\mathbf{k}_O(t) - \mathbf{k}_O(0) = \int_0^t \mathbf{M}_O \, dt . \tag{7.70}$$

Całka występująca w tym równaniu nosi nazwę *pokrętu* momentu głównego, a samo równanie jest *zasadą krętu i pokrętu*.

Przyrost krętu układu materialnego względem dowolnego nieruchomego punktu jest równy pokrętowi momentu głównego sił zewnętrznych względem tego samego punktu.

Równania (7.69) i (7.70) są słuszne nie tylko dla układu punktów materialnych, ale i dla bryły.

Często się zdarza, że moment główny układu sił zewnętrznych względem obranego nieruchomego bieguna redukcji O jest stale równy zeru bądź jest pomijalnie mały, $\mathbf{M}_O \equiv 0$. Wtedy całka po prawej stronie równania (7.70) jest równa zeru i zasada krętu i pokrętu przechodzi w *zasadę zachowania krętu*:

$$\mathbf{k}_O(t) - \mathbf{k}_O(0) = 0, \quad \text{czyli} \quad \mathbf{k}_O(t) = \mathbf{k}_O(0) = \text{const}$$

lub

$$\text{jeżeli} \quad \mathbf{M}_O = 0, \quad \text{to} \quad \mathbf{k}_O = \text{const} . \tag{7.71}$$

Otrzymaną *zasadę zachowania krętu* można wyrazić słownie:

Jeżeli moment główny sił zewnętrznych względem nieruchomego punktu redukcji O jest równy zeru, to kręt układu materialnego (bryły) względem tego punktu jest wielkością stałą.

7.3.5. Redukcja zasady krętu i pokrętu do środka masy

Zastanówmy się, jaką postać przyjmie zasada krętu i pokrętu (7.70), jeżeli za biegun redukcji przyjmiemy nie dowolny punkt O, lecz środek masy układu materialnego C. W celu udzielenia odpowiedzi na postawione pytanie podstawmy do równania (7.69) wzór (7.59):

$$\mathbf{k}_O = \mathbf{k}_C + \mathbf{r}_C \times m\mathbf{v}_C$$

oraz twierdzenie o momencie głównym (3.29):

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_C + \mathbf{r}_C \times \mathbf{W}$$

i dokonajmy różniczkowania:

$$\frac{d\mathbf{k}_C}{dt} + \frac{d\left(\mathbf{r}_C \times m\,\mathbf{v}_C\right)}{dt} = \mathbf{M}_C + \mathbf{r}_C \times \mathbf{W}\,,$$

$$\frac{d\mathbf{k}_C}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_C}{dt} \times m\,\mathbf{v}_C + \mathbf{r}_C \times \frac{d\left(m\,\mathbf{v}_C\right)}{dt} = \mathbf{M}_C + \mathbf{r}_C \times \mathbf{W}\,. \tag{f}$$

Drugi wyraz po lewej stronie powyższego równania jest równy zeru, ponieważ jest to iloczyn wektorowy wektorów równoległych:

$$\frac{d\mathbf{r}_C}{dt} \times m\,\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_C \times m\,\mathbf{v}_C = 0\,,$$

a pochodna występująca w trzecim wyrazie jest pochodną względem czasu pędu układu materialnego, równą wektorowi głównemu układu sił zewnętrznych (7.48):

$$\frac{d\left(m\,\mathbf{v}_C\right)}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{W}\,.$$

Po uwzględnieniu powyższych zależności w równaniu (f) i uproszczeniu otrzymamy zasadę krętu przy redukcji do środka masy:

$$\frac{d\mathbf{k}_C}{dt} = \mathbf{M}_C\,. \tag{7.72}$$

Z kolei po scałkowaniu tego równania od zera do t otrzymamy zasadę krętu i pokrętu zredukowaną do środka masy układu:

$$\mathbf{k}_C(t) - \mathbf{k}_C(0) = \int_0^t \mathbf{M}_C\,dt\,. \tag{7.73}$$

Widzimy, że formalna postać otrzymanych równań (7.72) i (7.73) jest taka sama jak równań (7.69) i (7.70), ale równania (7.72) i (7.73) nie opisują ruchu środka masy C. Do opisu ruchu środka masy C należałoby zastosować zasadę pędu (7.48).

Jeżeli założymy teraz, że moment sił zewnętrznych względem środka masy C układu materialnego będzie stale równy zeru, $\mathbf{M}_C \equiv 0$, to zasada krętu i pokrętu (7.73) zredukowana do środka masy przejdzie w zasadę zachowania krętu względem środka masy, co można zapisać w następujący sposób:

$$\text{jeżeli} \quad \mathbf{M}_C = 0, \quad \text{to} \quad \mathbf{k}_C = \text{const} \tag{7.74}$$

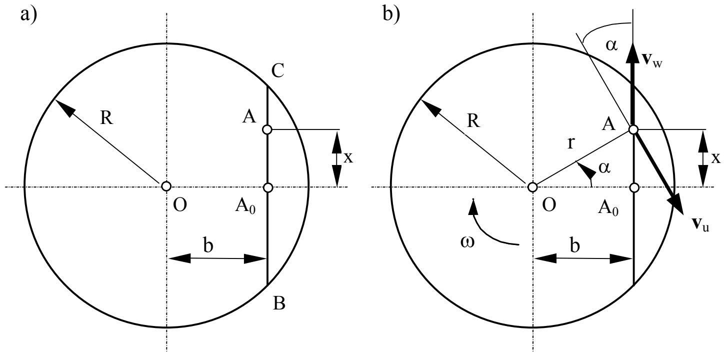
lub ująć słownie:

Jeżeli moment główny sił zewnętrznych względem środka masy układu materialnego jest równy zeru, to kręt tego układu materialnego względem środka masy jest wielkością stałą.

Przykład 7.10. Punkt materialny A o masie m_1 zaczął się poruszać wzdłuż cięciwy BC (rys. 7.20a) poziomej jednorodnej tarczy kołowej o promieniu R i masie m według równania:

$$x = b\sin kt,$$

gdzie x oznacza współrzędną odmierzoną jak na rys. 7.20, k pewną stałą, a $2b \le BC$. Tarcza może się obracać bez tarcia wokół osi pionowej z przechodzącej przez środek tarczy O. Wyznaczyć prędkość kątową ω tarczy w funkcji czasu t, jeżeli odległość cięciwy od środka tarczy wynosi b, a tarcza w chwili początkowej $t = 0$ była nieruchoma.



Rys. 7.20. Wyznaczenie prędkości kątowej tarczy

Rozwiązanie. Na układ działają siły zewnętrzne ciężkości tarczy i punktu materialnego oraz reakcje w łożyskach osi obrotu tarczy. Siły ciężkości są równoległe do osi obrotu, więc ich momenty względem osi obrotu są zawsze równe zeru. Nie dają momentu względem tej osi również reakcje w łożyskach. Zatem zgodnie z zasadą zachowania krętu (7.71) kręt układu względem osi nie ulega zmianie. Ponieważ w chwili początkowej $t = 0$, gdy punkt A był jeszcze nieruchomy, kręt układu był równy zeru, zatem w dowolnej chwili t kręt tego układu również będzie równy zeru. Po rozpoczęciu ruchu punktu A tarcza zacznie się poruszać ruchem obrotowym z prędkością kątową • w kierunku przeciwnym do ruchu punktu (rys. 7.20b). Prędkość punktu tarczy, w którym w chwili t znajduje się punkt A, czyli prędkość unoszenia punktu A

$$v_u = \omega r = \omega\sqrt{b^2 + x^2} = \omega b\sqrt{1 + \sin^2 kt}\ .$$

Prędkość punktu A względem tarczy (prędkość względna)

$$v_w = \frac{dx}{dt} = bk\cos kt\ .$$

Z kolei prędkość bezwzględna punktu A jest równa sumie wektorowej prędkości unoszenia i prędkości względnej:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_u + \mathbf{v}_w\ .$$

Rzut wektora prędkości bezwzględnej punktu A na kierunek prostopadły do promienia $OA = r$ jest równy

$$v_w\cos\alpha - v_u\ .$$

Kręt układu w chwili t względem osi obrotu z składa się z krętu k_{1z} punktu A i krętu k_{2z} tarczy względem tej osi. Kręt punktu A

$$\begin{aligned} k_{1z} &= m_1 r(v_w\cos\alpha - v_u) = m_1(v_w r\cos\alpha - v_u r) = \\ &= m_1\left(v_w b - \omega b\sqrt{1+\sin^2 kt}\, r\right) = m_1\left(b^2 k\cos kt - \omega b\sqrt{1+\sin^2 kt}\sqrt{b^2 + x^2}\right) = \\ &= m_1\left[b^2 k\cos kt - \omega b^2\left(1 + \sin^2 kt\right)\right], \end{aligned}$$

a kręt tarczy względem osi obrotu

$$k_{2z} = I_z\omega = \frac{1}{2} mR^2\omega\,.$$

Ponieważ kręt całkowity układu jest w każdej chwili równy zeru, otrzymujemy:

$$m_1\left[b^2 k\cos kt - \omega b^2\left(1 + \sin^2 kt\right)\right] - \frac{1}{2} mR^2\omega = 0\,.$$

Z powyższego równania znajdujemy prędkość kątową tarczy:

$$\omega = \frac{m_1 b^2 k \cos kt}{m_1 b^2 \left(1 + \sin^2 kt\right) + \frac{1}{2} m R^2}.$$