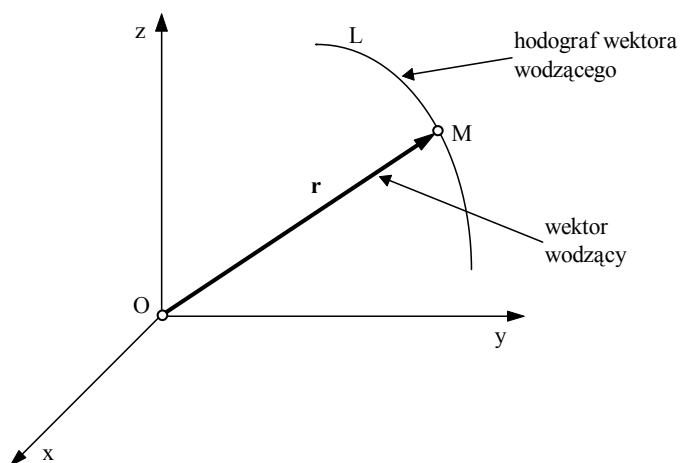


### 5.2.1. Tor, prędkość i przyspieszenie punktu

Rozpatrzmy ruch punktu materialnego względem przyjętego układu odniesienia uważanego za nieruchomy. Aby poznać ruch tego punktu, w każdej chwili musimy mieć możliwość wyznaczenia miejsca, w którym się ten punkt znajduje. Do określenia położenia dowolnego punktu  $M$  (rys. 5.1) w każdej chwili względem nieruchomego punktu  $O$  wystarczy podanie wektora  $\mathbf{r}$  o początku w punkcie  $O$  i końcu w rozważanym punkcie  $M$ .



Rys. 5.1. Opis położenia punktu za pomocą wektora wodzącego

Wektorową funkcję czasu

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (5.1)$$

nazywamy *wektorem wodzącym*. Wektor ten możemy zapisać analitycznie w prostokątnym układzie współrzędnych  $x, y, z$  za pomocą jego współrzędnych w postaci funkcji wektorowej:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (5.2)$$

lub równoważnych trzech równań skalarnych

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (5.3)$$

Równanie (5.1) lub (5.2) nazywamy wektorowym *równaniem ruchu*, a trzy równania (5.3), równoważne wektorowemu, skalarnymi lub algebraicznymi *równaniami ruchu*.

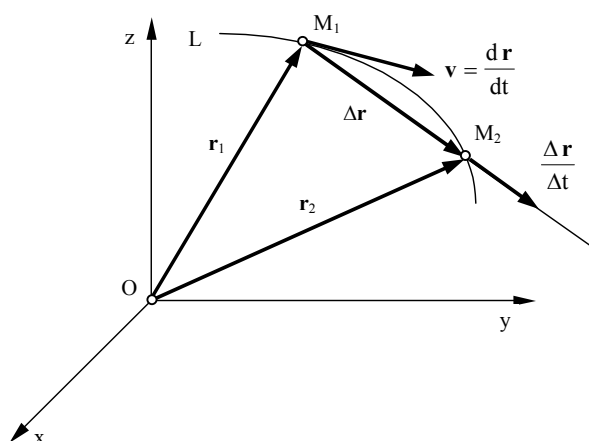
Gdy punkt  $M$  będzie się poruszał, wektor  $\mathbf{r}$  będzie zmieniał z upływem czasu swoją wartość i kierunek, a koniec tego wektora zakreśli krzywą  $L$ , którą będziemy nazywać *torem punktu* lub *hodografem* wektora wodzącego  $\mathbf{r}$ . Jak już powiedziano w p. 2.3.7, hodograf rozpatrywanej funkcji wektorowej to linia zakreślona przez końce wektorów, których początki znajdują się w jednym punkcie.

W czasie ruchu punktu  $M$  wektor wodzący  $\mathbf{r}$  tego punktu będzie zmieniał swoją wartość i kierunek. Załóżmy, że w chwili czasu  $t_1$  położenie punktu  $M_1$  wyznacza wektor wodzący  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$ , a w chwili  $t_2 = t_1 + \Delta t$  punkt zajmuje położenie  $M_2$  wyznaczone przez wektor wodzący  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$ , jak na rys. 5.2. Widzimy, że po upływie czasu  $\Delta t = t_2 - t_1$  wektor wodzący uzyskał przyrost  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ . Iloraz  $\Delta \mathbf{r} / \Delta t$  jest wektorem współliniowym z wektorem  $\Delta \mathbf{r}$ , czyli jest skierowany wzdłuż cięciwy  $M_1 M_2$ . Jeżeli przyrost czasu  $\Delta t$  będzie dążył do zera, to w granicy otrzymamy pochodną wektora  $\mathbf{r}$  względem czasu:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v},$$

nazywaną prędkością punktu. Oznacza to, że *prędkością punktu* nazywamy *pochodną względem czasu wektora wodzącego tego punktu*:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (5.4)$$



Rys. 5.2. Prędkość punktu

Łatwo zauważyć, że jeżeli punkt  $M_2$  dąży do punktu  $M_1$ , to cięciwa  $M_1 M_2$  dąży do stycznej do toru w punkcie  $M_1$ . Wynika stąd, że prędkość punktu jest styczna do toru punktu  $M$ , czyli styczna do hodografu wektora wodzącego  $\mathbf{r}$ .

Gdy wektor wodzący zapiszemy w postaci (5.2), to zgodnie z podanymi w p. 2.3.7 zasadami różniczkowania jego pochodna

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}. \quad (5.5)$$

Po zapisaniu prędkości  $\mathbf{v}$  w układzie współrzędnych  $x, y, z$

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \quad (5.6)$$

i podstawieniu do równania (5.5) oraz po porównaniu wyrazów przy tych samych wersorach otrzymamy wzory na współrzędne prędkości:

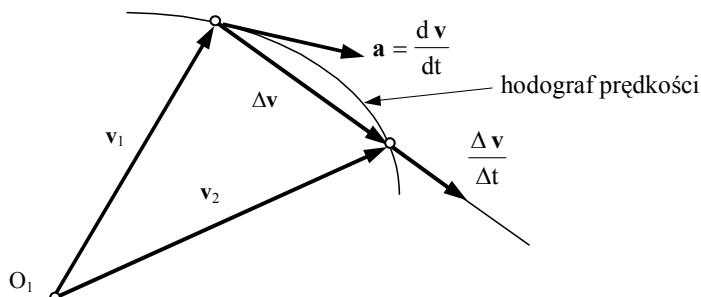
$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (5.7)$$

Widzimy, że współrzędne prędkości są równe pochodnym względem czasu odpowiednich współrzędnych wektora wodzącego.

Wartość prędkości określa wzór:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (5.8)$$

W czasie ruchu punktu  $M$  jego prędkość  $\mathbf{v}$  w ogólnym przypadku ruchu zmienia zarówno swoją wartość, jak i kierunek. Jeżeli dla dwóch położen punktu  $M$ , odpowiadających chwilom  $t_1$  i  $t_2 = t_1 + \Delta t$ , wektory prędkości oznaczmy odpowiednio przez  $\mathbf{v}_1$  i  $\mathbf{v}_2$  i przesuniemy je tak, aby ich początki znalazły się w jednym punkcie  $O_1$  (rys. 5.3), to widzimy, że prędkość w czasie  $\Delta t = t_2 - t_1$  uzyskała przyrost  $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ . Końce tych wektorów leżą na linii, którą nazywamy *hodograwem prędkości*.



Rys. 5.3. Przyspieszenie punktu

Wielkością charakteryzującą zmianę prędkości w czasie jest wektor  $\Delta\mathbf{v}/\Delta t$  o kierunku przyrostu prędkości  $\Delta\mathbf{v}$ . Jeżeli przyrost czasu  $\Delta t$  będzie dążył do zera, to

w granicy otrzymamy pochodną prędkości  $\mathbf{v}$  względem czasu, nazywaną przyśpieszeniem  $\mathbf{a}$  punktu M:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a} .$$

*Przyśpieszenie punktu jest pochodną prędkości względem czasu albo drugą pochodną wektora wodzącego względem czasu.*

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} . \quad (5.9)$$

Kierunek przyśpieszenia jest styczny do hodografu prędkości  $\mathbf{v}$ .

W prostokątnym układzie współrzędnych  $x, y, z$  przyśpieszenie  $\mathbf{a}$  możemy zapisać w następujący sposób:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} . \quad (5.10)$$

W celu wyznaczenia współrzędnych przyśpieszenia zróżniczkujemy względem czasu prędkość wyrażoną wzorem (5.6):

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{k} . \quad (5.11)$$

Po uwzględnieniu zależności (5.7) współrzędne przyśpieszenia będą opisane zależnościami:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} . \quad (5.12)$$

Z powyższych wzorów wynika, że współrzędne przyśpieszenia punktu w nieruchomym prostokątnym układzie współrzędnych są pierwszymi pochodnymi względem czasu współrzędnych prędkości lub drugimi pochodnymi względem czasu odpowiednich współrzędnych tego punktu.

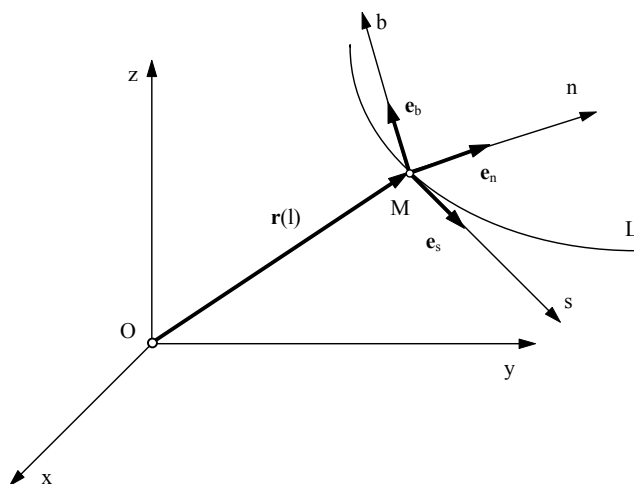
Znając współrzędne przyśpieszenia, jego moduł obliczymy ze wzoru:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} . \quad (5.13)$$

### 5.2.2. Prędkość i przyśpieszenie punktu w naturalnym układzie współrzędnych

W poprzednim punkcie wyznaczyliśmy współrzędne prędkości  $\mathbf{v}$  i przyśpieszenia  $\mathbf{a}$  w prostokątnym układzie współrzędnych  $x, y, z$ . Na podstawie takiego postę-

powania nie można ustalić, jak porusza się punkt względem toru  $L$  i jak zmieniają się moduły i kierunki wektorów prędkości  $\mathbf{v}$  i przyspieszenia  $\mathbf{a}$  w funkcji przebytej drogi  $l$ . W celu udzielenia odpowiedzi na postawione pytanie przyjmijmy w punkcie  $M$  lokalny układ współrzędnych prostokątnych o osiach  $s, n, b$  o kierunkach odpowiednio stycznym  $s$ , normalnym  $n$  i binormalnym  $b$  do krzywej w rozważanym punkcie  $M$  (rys. 5.4). Kierunki osi  $s, n, b$  takiego układu współrzędnych będą określone odpowiednio wersorami  $\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_n$  i  $\mathbf{e}_b$ . Tak zdefiniowane wersory  $\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_n$  i  $\mathbf{e}_b$  wyznaczają w każdym punkcie linii (toru)  $L$  prawoskrętny układ współrzędnych, który nazywamy *układem naturalnym*.



Rys. 5.4. Ruch punktu w naturalnym układzie współrzędnych

Wykażemy, że jeżeli dane jest wektorowe równanie toru w funkcji drogi  $l$  mierzonej wzdłuż toru:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(l), \quad (5.14)$$

to wersory te są opisane wzorami:

$$\mathbf{e}_s = \frac{d\mathbf{r}}{dl}, \quad \mathbf{e}_n = \rho \frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2}, \quad \mathbf{e}_b = \mathbf{e}_s \times \mathbf{e}_n, \quad (5.15)$$

gdzie  $\rho$  jest promieniem krzywizny w punkcie  $M$ .

W tym celu przedstawmy fragment linii  $L$  w płaszczyźnie ściśle stycznej  $sn$  widzianej od strony strzałki osi binormalnej  $b$  (rys. 5.5). Na torze (linii) oberzmy punkt  $M$  i drugi  $M'$  tak, aby długość  $\Delta l$  drogi mierzona po łuku  $MM'$  była niewielka. Jeżeli weźmiemy granicę ilorazu przyrostu wektora wodzącego  $\Delta \mathbf{r}$  i przyrostu drogi  $\Delta l$

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta l} = \frac{d\mathbf{r}}{dl},$$

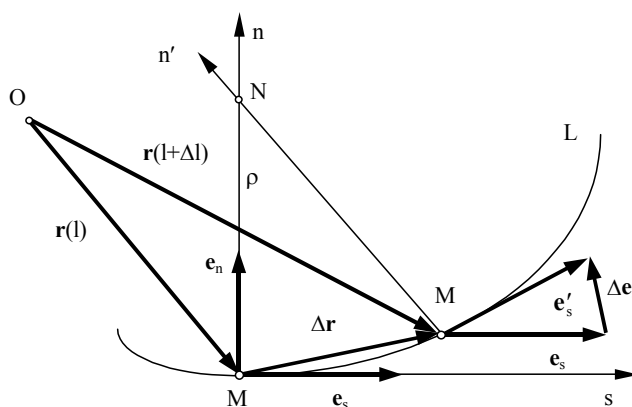
to otrzymamy pochodną wektora wodzącego  $\mathbf{r}$  względem drogi  $l$ . Moduł tej pochodnej jest równy jedności, ponieważ gdy  $\Delta l$  będzie dążyć do zera, to długość cięciwy  $MM' = \Delta r$  będzie dążyć do długości łuku  $\Delta l$ :

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta l} \right| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dl} \right| = 1.$$

Zatem pochodna wyrażona wzorem:

$$\mathbf{e}_s = \frac{d\mathbf{r}}{dl}$$

jest równa wersorowi stycznej  $\mathbf{e}_s$  do toru w punkcie  $M$ .



Rys. 5.5. Ruch punktu w płaszczyźnie ściśle stycznej

Aby udowodnić słuszność wzoru na wersor normalnej  $\mathbf{e}_n$  w punkcie  $M$ , wykreślamy styczną  $s$  oraz jej wersor  $\mathbf{e}_s$  i normalną  $n$ , a w punkcie  $M'$  wersor stycznej  $\mathbf{e}'_s$  i normalną  $n'$ . Punkt przecięcia osi  $n'$  i  $n$  oznaczmy przez  $N$ . Widzimy, że wersor  $\mathbf{e}_s$  podczas przemieszczania się z punktu  $M$  do  $M'$  doznał przyrostu  $\Delta \mathbf{e}_s$ . Jeżeli zbudujemy wektor będący ilorzem przyrostu  $\Delta \mathbf{e}_s$  i długości łuku  $\Delta l$  i wyznaczmy granicę tej wielkości przy  $\Delta l$  dążącym do zera, to otrzymamy drugą pochodną wektora wodzącego  $\mathbf{r}$  względem drogi  $l$ :

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{e}_s}{\Delta l} = \frac{d\mathbf{e}_s}{dl} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dl^2}. \quad (\text{a})$$

Kierunek tego wektora będzie normalny do krzywej w punkcie M, ponieważ jeżeli punkt M' będzie się zbliżał do punktu M, to kąt między przyrostem  $\Delta \mathbf{e}_s$  i wektorem  $\mathbf{e}_s$  będzie dążył do kąta prostego. Można to też wykazać analitycznie. Wiadomo, że iloczyn wektora pomnożonego skalarnie przez siebie będzie równy jedności:

$$\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}_s = 1.$$

Po zróżniczkowaniu tej zależności względem czasu mamy:

$$\mathbf{e}_s \cdot \frac{d\mathbf{e}_s}{dt} = 0 \quad \text{lub} \quad \mathbf{e}_s \cdot \frac{d\mathbf{e}_s}{dl} \frac{dl}{dt} = 0,$$

a po podzieleniu przez  $dl/dt$

$$\mathbf{e}_s \cdot \frac{d\mathbf{e}_s}{dl} = \mathbf{e}_s \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}}{dl^2} = 0.$$

Z powyższego wynika, że druga pochodna wektora wodzącego względem drogi jest wektorem prostopadłym do osi stycznej s.

Wyznamy obecnie moduł drugiej pochodnej wektora wodzącego  $\mathbf{r}$  względem drogi l. Z rysunku 5.5 można zauważyć, że dla małych przyrostów  $\Delta \mathbf{r}$  trójkąt  $\mathbf{e}_s \Delta \mathbf{e}_s \mathbf{e}'_s$  i trójkąt N M M' są podobne. Możemy zatem napisać:

$$\left| \frac{\Delta \mathbf{e}_s}{\Delta \mathbf{r}} \right| = \left| \frac{\mathbf{e}_s}{MN} \right|.$$

Wiadomo także, że gdy  $\Delta l$  będzie dążyć do zera, to długość przyrostu  $\Delta \mathbf{r}$  będzie dążyć do długości łuku  $\Delta l$ , czyli  $|\Delta \mathbf{r}| = \Delta l$ . Powyższą równość zapiszemy zatem w postaci:

$$\left| \frac{\Delta \mathbf{e}_s}{\Delta l} \right| = \left| \frac{\mathbf{e}_s}{MN} \right|,$$

a po obliczeniu granicy tej równości mamy:

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \mathbf{e}_s}{\Delta l} \right| = \left| \frac{d\mathbf{e}_s}{dl} \right| = \left| \frac{d^2 \mathbf{r}}{dl^2} \right| = \left| \frac{\mathbf{e}_s}{MN} \right| = \frac{1}{MN} = \frac{1}{\rho},$$

ponieważ z geometrii analitycznej wiadomo, że granica:

$$\lim_{M' \rightarrow M} M'N = \rho$$

jest promieniem krzywizny, czyli promieniem koła ściśle stycznego w rozpatrywanym punkcie.

Ostatecznie moduł drugiej pochodnej wektora wodzącego  $\mathbf{r}$  względem drogi  $l$  jest równy odwrotności promienia krzywizny, nazywanej krzywizną w rozważanym punkcie:

$$\left| \frac{d^2 \mathbf{r}}{dl^2} \right| = \frac{1}{\rho}. \quad (5.16)$$

Wersor osi normalnej  $\mathbf{e}_n$  otrzymamy przez podzielenie wektora (a) o kierunku normalnej przez jego moduł (5.16):

$$\mathbf{e}_n = \frac{\frac{d^2 \mathbf{r}}{dl^2}}{\left| \frac{d^2 \mathbf{r}}{dl^2} \right|} = \frac{\frac{d^2 \mathbf{r}}{dl^2}}{\frac{1}{\rho}} = \rho \frac{d^2 \mathbf{r}}{dl^2}.$$

Dla wyprowadzenia wzorów na prędkość  $\mathbf{v}$  i przyśpieszenie  $\mathbf{a}$  punktu M przedstawimy wektor wodzący  $\mathbf{r}(t)$  w postaci funkcji złożonej:  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}[l(t)]$ .

Z definicji prędkości i ze wzoru (2.51) na obliczanie pochodnej funkcji złożonej mamy:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dl} \frac{dl}{dt}.$$

W powyższym wzorze pierwsza pochodna jest wyliczonym wersorem  $\mathbf{e}_s$  osi stycznej  $s$ , a druga modułem prędkości równym pochodnej drogi względem czasu:

$$v = \frac{dl}{dt}. \quad (5.17)$$

Zatem prędkość przedstawia wzór:

$$\mathbf{v} = v \mathbf{e}_s. \quad (5.18)$$

Otrzymaliśmy zatem potwierdzenie, że prędkość punktu jest styczna do toru.

Przyśpieszenie obliczymy, licząc pochodną prędkości względem czasu. Korzystając ze wzoru na pochodną iloczynu, otrzymamy:

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_s + v \frac{d\mathbf{e}_s}{dt} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_s + v \frac{d\mathbf{e}_s}{dl} \frac{dl}{dt} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_s + v^2 \frac{d^2 \mathbf{r}}{dl^2}.$$

Po podstawieniu do tego wzoru zależności na wersor normalnej:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dl^2} = \frac{\mathbf{e}_n}{\rho}$$



otrzymujemy wzór na przyśpieszenie punktu M w naturalnym układzie współrzędnych:

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_s + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n \quad (5.19)$$

lub

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_s + \mathbf{a}_n . \quad (5.20)$$

Z otrzymanego wzoru wynika, że przyśpieszenie w rozważanym układzie współrzędnych  $s, n, b$  ma dwie składowe: styczną  $\mathbf{a}_s$  i normalną  $\mathbf{a}_n$  (skierowaną do środka krzywizny) i leży w płaszczyźnie ściśle stycznej  $sn$ . Moduły tych składowych są następujące:

$$a_s = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad (5.21)$$

a wartość przyśpieszenia całkowitego obliczymy ze wzoru:

$$a = \sqrt{a_s^2 + a_n^2} . \quad (22)$$

Ze wzorów (5.21) widać, że przyśpieszenie styczne  $\mathbf{a}_s$  jest miarą zmiany prędkości i jest równe zero, gdy moduł prędkości będzie stały, z kolei przyśpieszenie normalne  $\mathbf{a}_n$  jest miarą zakrzywienia toru. W ruchu prostoliniowym przyśpieszenie normalne jest równe zero.

W ruchu punktu po krzywej płaskiej znane są kierunki składowych przyśpieszenia albo ich wyznaczenie nie nastęrcza większych trudności, ponieważ wektory obu składowych przyśpieszenia będą leżały w płaszczyźnie ruchu. W przypadku ruchu przestrzennego punktu przy obliczaniu omawianych składowych przyśpieszenia mogą się pojawić trudności natury matematycznej.

**Przykład 5.1.** Punkt porusza się w płaszczyźnie  $xy$  zgodnie z równaniami ruchu:

$$x = -4t^2 + 1, \quad y = -3t .$$

Wyznaczyć równanie toru, prędkość, przyśpieszenie styczne normalne i całkowite oraz promień krzywizny dla czasu  $t_1 = 0,5$  s. Przyjąć wymiary w metrach, a czas w sekundach.

*Rozwiązanie.* W celu wyznaczenia równania toru punktu należy z równań ruchu wyeliminować parametr  $t$  (czas). Po wyznaczeniu z drugiego równania ruchu czasu i podstawieniu do pierwszego otrzymujemy:

$$y^2 = -\frac{9}{4}(x-1).$$

Równanie to przedstawia parabolę.

Współrzędne prędkości punktu wyznaczmy ze wzorów (5.7), a jej moduł ze wzoru (5.8).

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -8t, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = -3,$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{64t^2 + 9}, \quad a v(t_1) = \sqrt{64\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 9} = \sqrt{25} = 5 \text{ m/s}.$$

Współrzędne przyspieszenia i jego wartość wyliczymy ze wzorów (5.12) i (5.13):

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -8, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = 0,$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{64 + 0} = 8 \text{ m/s}^2.$$

Przyspieszenie styczne obliczymy z pierwszego wzoru (5.21):

$$a_s = \frac{dv}{dt} = \frac{2 \cdot 64t}{2\sqrt{64t^2 + 9}} = \frac{64t}{\sqrt{64t^2 + 9}},$$

$$a_s(t_1) = \frac{64 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{64\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 9}} = \frac{32}{\sqrt{25}} = 6,4 \text{ m/s}^2.$$

W celu wyznaczenia przyspieszenia normalnego przekształcimy wzór (5.22) do postaci:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_s^2}.$$

Po podstawieniu do tego wzoru wyliczonych wyżej wartości liczbowych otrzymamy przyspieszenie normalne w chwili  $t_1$ :

$$a_n(t_1) = \sqrt{8^2 - (6,4)^2} = 4,8 \text{ m/s}^2.$$

Promień krzywizny obliczymy z drugiego wzoru (5.21):

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{5^2}{4,8} = 5,2 \text{ m}.$$

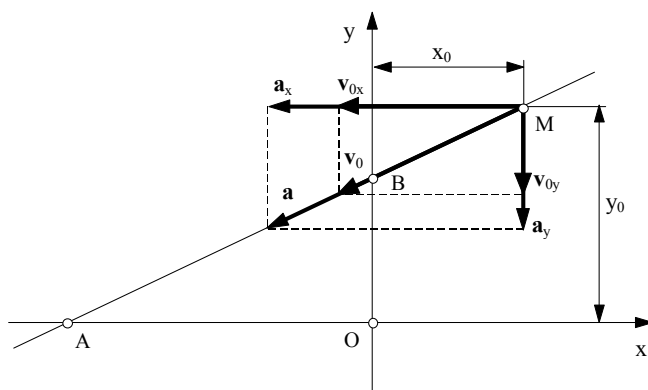
**Przykład 5.2.** Dane są kinematyczne równania ruchu punktu M w prostokątnym układzie współrzędnych:

$$x = 2 - 3t - 6t^2, \quad y = 3 - \frac{3}{2}t - 3t^2,$$

gdzie  $x$  i  $y$  są podane w metrach, a czas w sekundach. Wyznaczyć równanie toru, promień krzywizny, prędkość, przyspieszenie styczne, normalne i całkowite. Tor oraz składowe prędkości i przyspieszenia dla chwili początkowej  $t = 0$  przedstawić na rysunku.

*Rozwiązanie.* Jeżeli drugie równanie ruchu pomnożymy stronami przez  $-2$  i dodamy do pierwszego, to otrzymamy równanie toru w postaci:

$$y = \frac{1}{2}x + 2.$$



Rys. 5.6. Prędkość i przyspieszenie punktu we współrzędnych prostokątnych na płaszczyźnie

Jest to równanie prostej, która odcina na osi odciętych odcinek  $OA = 4$  m i na osi rzędnych odcinek  $OB = 2$  m (rys. 5.6). Położenie punktu M na prostej (torze) dla chwili początkowej  $t = 0$  wyznaczmy z równań ruchu:  $x_0 = 2$ ,  $y_0 = 3$ . Ponieważ promień krzywizny jest równy nieskończoności ( $\rho = \infty$ ), przyspieszenie normalne jest równe zero:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0.$$

Współrzędne prostokątne prędkości i przyspieszeń oraz ich moduły obliczymy tak jak w poprzednim przykładzie.

Prędkość:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -3(1+4t), \quad v_y = \frac{dy}{dt} = -\frac{3}{2}(1+4t), \quad (\text{a})$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 3\sqrt{(1+4t)^2 + \frac{1}{4}(1+4t)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{5}(1+4t). \quad (\text{b})$$

Przyśpieszenie:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -12, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -6,$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{12^2 + 6^2} = 6\sqrt{5} \text{ m/s}^2.$$

Przyśpieszenie styczne:

$$a_s = a = \frac{dv}{dt} = \frac{3}{2}\sqrt{5} \cdot 4 = 6\sqrt{5} \text{ m/s}^2.$$

Z otrzymanych wyników widzimy, że punkt M porusza się po prostej ze stałym przyśpieszeniem skierowanym tak jak na rysunku.

Prędkości w chwili początkowej otrzymamy po podstawieniu do wzorów (a) i (b)  $t = 0$ .

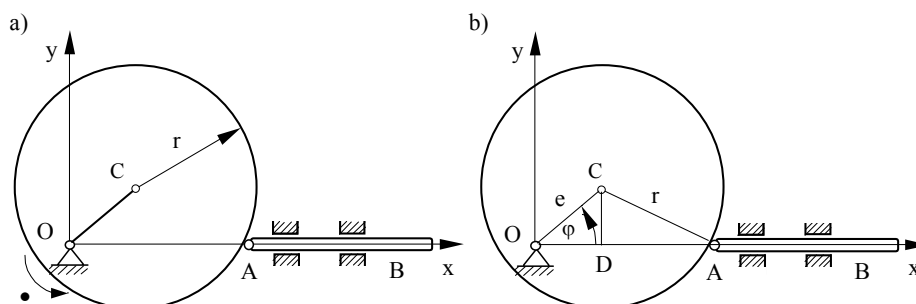
$$v_{0x} = -3, \quad v_{0y} = -\frac{3}{2}, \quad v_0 = \frac{3}{2}\sqrt{5} \text{ m/s}.$$

**Przykład 5.3.** Trzpień AB (rys. 5.7a) jest dociskany do mimośrod w kształcie tarczy kołowej o promieniu  $r$  tak, że cały czas pozostaje z nim w kontakcie. Oś obrotu mimośrod przechodzi przez punkt O oddalony od środka tarczy C o  $OC = e$ . Mimośród obraca się wokół osi obrotu ze stałą prędkością kątową  $\omega = \pi \text{ s}^{-1}$ . Wyznaczyć prędkość i przyśpieszenie trzpienia dla czasu  $t_1 = 0,5 \text{ s}$ , jeżeli oś trzpienia pokrywa się z osią  $x$  tak jak na rysunku.

*Rozwiązanie.* Dla obliczenia prędkości i przyśpieszenia trzpienia musimy ułożyć jego równanie ruchu, np. równanie punktu A. Na podstawie rys. 5.7b możemy napisać:

$$x_A = OA = OD + DA = e \cos\varphi + \sqrt{r^2 - CD^2} =$$

$$= e \cos\varphi + \sqrt{r^2 - (e \sin\varphi)^2} = e \cos\varphi + \sqrt{r^2 - e^2 \sin^2\varphi}.$$



Rys. 5.7. Wyznaczenie ruchu trzpienia AB

Po podstawieniu do tej zależności, zgodnie z treścią zadania,  $\varphi = \omega t = \pi t$  otrzymamy równanie ruchu punktu A:

$$x_A = e \cos \pi t + \sqrt{r^2 - e^2 \sin^2 \pi t}. \quad (\text{a})$$

Prędkość punktu A otrzymamy po obliczeniu pochodnej tego równania względem czasu:

$$\begin{aligned} v_A &= \frac{dx_A}{dt} = -e\pi \sin \pi t + \frac{-e^2 \pi \sin \pi t \cos \pi t}{2\sqrt{r^2 - e^2 \sin^2 \pi t}} = \\ &= -e\pi \sin \pi t - \frac{e^2 \pi}{4} \frac{\sin(2\pi t)}{\sqrt{r^2 - e^2 \sin^2 \pi t}}. \end{aligned} \quad (\text{b})$$

Po zróżniczkowaniu powyższego wzoru względem czasu i uporządkowaniu wyrazów otrzymamy przyspieszenie:

$$a_A = -e\pi \left[ \cos \pi t + \frac{e}{4} \frac{2\pi \cos(2\pi t)(r^2 - e^2 \sin^2 \pi t) + e^2 \frac{\pi}{4} \sin^2(2\pi t)}{(r^2 - e^2 \sin^2 \pi t)\sqrt{r^2 - e^2 \sin^2 \pi t}} \right]. \quad (\text{c})$$

Po podstawieniu do wzorów (b) i (c)  $t_1 = 0,5$  s otrzymamy wartość prędkości i przyspieszenia dla tego czasu:

$$v_A(t_1) = -e\pi, a_A(t_1) = \frac{e^2 \pi^2}{2\sqrt{r^2 - e^2}}.$$