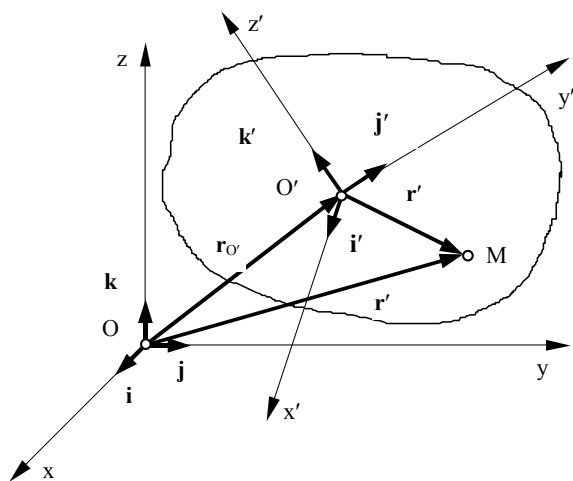


5.3.1. Zmiana układów odniesienia

Z każdą bryłą sztywną możemy związać układ współrzędnych opisujący ruch tej bryły w przestrzeni. Dlatego w dalszym ciągu w kinematyce bryły będziemy



się zajmować głównie wzajemnym ruchem układów współrzędnych. Znając ruch układu współrzędnych x', y', z' (rys. 5.8) sztywno związanego z bryłą (układu ruchomego) względem nieruchomego układu odniesienia x, y, z , będziemy mogli obliczyć prędkość i przyspieszenie wszystkich punktów bryły. W dalszej kolejności wyprowadzimy zależności geometryczne pomiędzy tymi układami współrzędnych.

Rys. 5.8. Wyznaczenie zależności pomiędzy układami współrzędnych

W tym celu ustalmy zależności pomiędzy współrzędnymi w obu układach tego samego punktu M.

W pierwszej kolejności rozpatrzmy zależności pomiędzy wersorami obu układów współrzędnych. Wersory i', j', k' ruchomego układu współrzędnych x', y', z' zapiszemy w układzie nieruchomym x, y, z :

$$\mathbf{i}' = (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}. \quad (\text{a})$$

Zawarte w nawiasach iloczyny skalarne wersorów są rzutami wersora \mathbf{i}' odpowiednio na osie x, y, z , są one również kosinusami kierunkowymi między osią x' a osiami x, y, z , które oznaczymy $p_{x'x}, p_{x'y}, p_{x'z}$:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i} &= \cos(x', x) = p_{x'x}, \\ \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j} &= \cos(x', y) = p_{x'y}, \\ \mathbf{i}' \cdot \mathbf{k} &= \cos(x', z) = p_{x'z}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{b})$$

Podstawiawszy powyższe oznaczenia do wzoru (a) oraz postępując podobnie z wersorami \mathbf{j}' i \mathbf{k}' otrzymamy wzory:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i}' &= p_{x'x} \mathbf{i} + p_{x'y} \mathbf{j} + p_{x'z} \mathbf{k}, \\ \mathbf{j}' &= p_{y'x} \mathbf{i} + p_{y'y} \mathbf{j} + p_{y'z} \mathbf{k}, \\ \mathbf{k}' &= p_{z'x} \mathbf{i} + p_{z'y} \mathbf{j} + p_{z'z} \mathbf{k}. \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

Widzimy, że do zapisania wersorów ruchomego układu współrzędnych w układzie nieruchomym należy znać dziewięć kosinusów kierunkowych zestawionych w poniższej tabeli.

		x	y	z
		i	j	k
x'	i'	$p_{x'x}$	$p_{x'y}$	$p_{x'z}$
y'	j'	$p_{y'x}$	$p_{y'y}$	$p_{y'z}$
z'	k'	$p_{z'x}$	$p_{z'y}$	$p_{z'z}$

Między tymi dziewięcioma kosinusami kierunkowymi istnieje sześć zależności. Otrzymamy je ze wzorów na iloczyny skalarne wersorów (2.16).

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}' &= p_{x'x}^2 + p_{x'y}^2 + p_{x'z}^2 = 1, \\ \mathbf{j}' \cdot \mathbf{j}' &= p_{y'x}^2 + p_{y'y}^2 + p_{y'z}^2 = 1, \\ \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}' &= p_{z'x}^2 + p_{z'y}^2 + p_{z'z}^2 = 1, \\ \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}' &= p_{x'x} p_{y'x} + p_{x'y} p_{y'y} + p_{x'z} p_{y'z} = 0, \\ \mathbf{j}' \cdot \mathbf{k}' &= p_{y'x} p_{z'x} + p_{y'y} p_{z'y} + p_{y'z} p_{z'z} = 0, \\ \mathbf{k}' \cdot \mathbf{i}' &= p_{z'x} p_{x'x} + p_{z'y} p_{x'y} + p_{z'z} p_{x'z} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

Dla wyznaczenia położenia układu współrzędnych x', y', z' względem układu x, y, z wystarczy podać 6 wielkości:

- trzy współrzędne wektora $\mathbf{r}_{O'}$ ($x_{O'}, y_{O'}, z_{O'}$),
- trzy niezależne kosinusy kierunkowe.

Obecnie wyznaczmy współrzędne wektora wodzącego \mathbf{r} punktu M w układzie x, y, z . Z rysunku 5.8 widzimy, że wektor wodzący \mathbf{r} tego punktu możemy zapisać jako sumę dwóch wektorów:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}'. \quad (5.25)$$

Wektor $\mathbf{r}_{O'}$ jest wektorem łączącym początki obu układów współrzędnych. Zapišemy go analitycznie w układzie współrzędnych x, y, z :

$$\mathbf{r}_{O'} = x_{O'} \mathbf{i} + y_{O'} \mathbf{j} + z_{O'} \mathbf{k}. \quad (5.26)$$

Wektor \mathbf{r}' jest wektorem wodzącym punktu M w układzie x', y', z' . Można go wyrazić za pomocą współrzędnych w tym układzie:

$$\mathbf{r}' = x' \mathbf{i}' + y' \mathbf{j}' + z' \mathbf{k}'. \quad (5.27)$$

Po podstawieniu wzorów (5.26) i (5.27) do równania (5.25) otrzymamy:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}' = x_{O'} \mathbf{i} + y_{O'} \mathbf{j} + z_{O'} \mathbf{k} + x' \mathbf{i}' + y' \mathbf{j}' + z' \mathbf{k}'. \quad (5.28)$$

Po rzutowaniu powyższego wektora na osie układu współrzędnych x, y, z oraz wykorzystaniu zależności (b) otrzymamy jego współrzędne w tym układzie współrzędnych:

$$\left. \begin{aligned} x = \mathbf{r} \cdot \mathbf{i} &= x_{O'} + x' p_{x'x} + y' p_{y'x} + z' p_{z'x}, \\ y = \mathbf{r} \cdot \mathbf{j} &= y_{O'} + x' p_{x'y} + y' p_{y'y} + z' p_{z'y}, \\ z = \mathbf{r} \cdot \mathbf{k} &= z_{O'} + x' p_{x'z} + y' p_{y'z} + z' p_{z'z}. \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

W podobny sposób można wyrazić współrzędne wektora \mathbf{r} w układzie x', y', z' .

Analogicznie można zapisać dowolny wektor \mathbf{c} dany w jednym układzie współrzędnych w drugim.

5.3.2. Prędkość i przyspieszenie dowolnego punktu bryły w ruchu ogólnym

Dla rozpatrzenia kinematyki bryły przyjmiemy, tak jak w poprzednim punkcie, dwa układy współrzędnych prostokątnych: jeden nieruchomy o osiach x, y, z i początku w punkcie O , a drugi o osiach x', y', z' i początku w dowolnym punkcie (biegunie) O' , poruszający się razem z bryłą (rys. 5.8).

Wektor wodzący dowolnego punktu M bryły w nieruchomym układzie współrzędnych x, y, z jest zgodnie ze wzorem (5.25) sumą dwóch wektorów $\mathbf{r}_{O'}$ i \mathbf{r}' , których znaczenie omówiono w p. 5.3.1:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}' .$$

Wiadomo z kinematyki punktu, że prędkość punktu jest pochodną wektora wodzącego \mathbf{r} względem czasu t (wzór 5.4). Zatem szukaną prędkość punktu M wyraża zależność:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}_{O'}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt} . \quad (5.30)$$

Pochodna wektora $\mathbf{r}_{O'}$ względem czasu jest prędkością punktu O' :

$$\mathbf{v}_{O'} = \frac{d\mathbf{r}_{O'}}{dt} = \frac{dx_{O'}}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy_{O'}}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz_{O'}}{dt} \mathbf{k} . \quad (a)$$

Po zróżniczkowaniu względem czasu wzoru (5.27) otrzymamy:

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt} \mathbf{k}' + x' \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y' \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z' \frac{d\mathbf{k}'}{dt} . \quad (b)$$

Ponieważ wektor \mathbf{r}' jest wektorem łączącym dwa punkty bryły sztywnej, więc jego moduł jest stały, $|\mathbf{r}'| = \text{const}$, a co za tym idzie, jego współrzędne x', y', z' są wielkościami stałymi niezależnymi od czasu. Zatem ich pochodne względem czasu są równe zero.

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dy'}{dt} = \frac{dz'}{dt} = 0 .$$

Wzór (b) przyjmuje więc postać:

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = x' \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y' \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z' \frac{d\mathbf{k}'}{dt} . \quad (c)$$

Występujące w tym wzorze pochodne względem czasu wektorów \mathbf{i}' , \mathbf{j}' , \mathbf{k}' układu ruchomego są miarą zmiany ich kierunków w czasie, ponieważ ich moduły są stałe. Można wykazać [9], że pochodne te można wyrazić za pomocą wzorów:

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}', \quad \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}', \quad \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}'. \quad (5.31)$$

Wektor $\boldsymbol{\omega}$ jest prędkością kątową charakteryzującą zmiany kierunków osi x' , y' , z' w czasie. W ruchomym układzie współrzędnych prędkość kątową $\boldsymbol{\omega}$ można wyrazić za pomocą współrzędnych:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_{x'} \mathbf{i}' + \omega_{y'} \mathbf{j}' + \omega_{z'} \mathbf{k}'. \quad (d)$$

Po podstawieniu zależności (5.31) do wzoru (c) otrzymamy:

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = x'(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}') + y'(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}') + z'(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}') = \boldsymbol{\omega} \times (x' \mathbf{i}' + y' \mathbf{j}' + z' \mathbf{k}').$$

Wyrażenie występujące w nawiasie, zgodnie z zależnością (5.27), jest wektorem \mathbf{r}' . Zatem

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'. \quad (e)$$

Po podstawieniu do wzoru (5.30) wzorów (a) i (e) otrzymujemy ostatecznie wzór na prędkość dowolnego punktu M bryły w ruchu ogólnym.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'. \quad (5.32)$$

Z otrzymanego wzoru wynika, że prędkość dowolnego punktu M bryły jest równa sumie prędkości $\mathbf{v}_{O'}$ dowolnie obranego bieguna O' , przyjętego za początek ruchomego układu współrzędnych, oraz iloczynu wektorowego $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$ i promienia wodzącego \mathbf{r}' punktu M w ruchomym układzie współrzędnych.

Na podstawie wzoru (5.32) możemy ponadto sformułować następujące wnioski:

- a) Prędkość punktu O' zależy od wyboru tego punktu.
- b) Prędkość kątowa $\boldsymbol{\omega}$ nie zależy od wyboru punktu O' , lecz jedynie od zmiany kierunków osi x' , y' , z' w czasie.
- c) Mimo zmiany punktu O' prędkość punktu M nie ulegnie zmianie, ponieważ zmieni się również odpowiednio wyrażenie $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$.

Po zróżniczkowaniu względem czasu wzoru na prędkość (5.32) otrzymamy przyśpieszenie punktu M:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt}. \quad (\text{f})$$

Po oznaczeniu przyśpieszenia początku O' ruchomego układu współrzędnych przez

$$\mathbf{a}_{O'} = \frac{d\mathbf{v}_{O'}}{dt} \quad (\text{g})$$

oraz przyśpieszenia kątownego przez

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \quad (\text{h})$$

i wykorzystaniu wzoru (e) wzór (f) przyjmie końcową postać:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{O'} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'). \quad (\text{5.33})$$

Wzór ten można przedstawić w nieco innej postaci po rozpisaniu występującego w nim podwójnego iloczynu wektorowego zgodnie z zależnością (2.34):

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{O'} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}') - \omega^2 \mathbf{r}'. \quad (\text{5.34})$$

Ze wzorów na prędkość (5.32) i przyśpieszenie (5.33) wynika, że aby wyznaczyć prędkość i przyśpieszenie dowolnego punktu M bryły, należy znać cztery wielkości wektorowe charakteryzujące ruch ogólny bryły:

- a) prędkość $\mathbf{v}_{O'}$ i przyśpieszenie $\mathbf{a}_{O'}$ jednego z punktów bryły O' (bieguna),
- b) prędkość kątową $\boldsymbol{\omega}$ i przyśpieszenie kątowe bryły $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Wyprowadzone w tym punkcie wzory na prędkość i przyśpieszenie dowolnego punktu bryły w ruchu ogólnym wykorzystamy przy omawianiu w następnych punktach tego rozdziału szczególnych przypadków ruchu ogólnego bryły, czyli postępowego, obrotowego, śrubowego, płaskiego i kulistego.

5.3.3. Ruch postępowy

Ruch bryły sztywnej nazywamy postępowym, jeżeli dowolna prosta sztywno związana z bryłą pozostaje w czasie ruchu stale równoległa do położenia początkowego.

Z powyższej definicji wynika, że każda z osi układu współrzędnych x', y', z' przedstawionego na rys. 5.8 będzie miała w ruchu postępowym ten sam kierunek. Podobnie wektor $\mathbf{r}' = \mathbf{O}'\mathbf{M}$ nie zmieni w czasie ruchu swojego kierunku, zatem będzie on wektorem stałym niezależnym od czasu: $\mathbf{r}' = \text{const}$, więc jego pochodna we wzorze (5.30) będzie równa zero. Stąd prędkość dowolnego punktu bryły wyraża zależność:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}_{O'}}{dt} = \mathbf{v}_{O'}. \quad (5.35)$$

Po zróżniczkowaniu tego wzoru otrzymujemy przyśpieszenie.

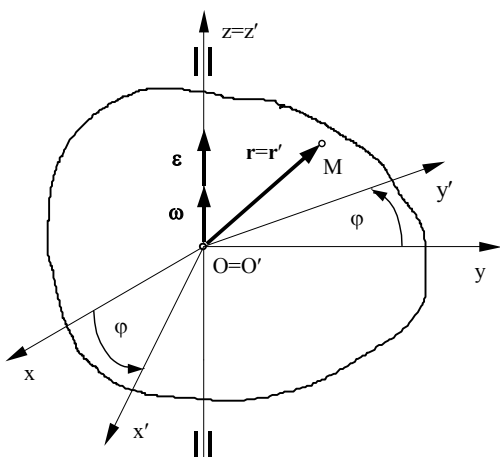
$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}_{O'}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}_{O'}}{dt} = \mathbf{a}_{O'}. \quad (5.36)$$

Ze wzorów (5.35) i (5.36) oraz definicji ruchu postępowego wynikają następujące wnioski:

- a) Wszystkie punkty bryły sztywnej w ruchu postępowym mają te same prędkości $\mathbf{v}_{O'}$ i przyśpieszenia $\mathbf{a}_{O'}$ w tej samej chwili czasu.
- b) Tory wszystkich punktów bryły mają ten sam kształt.
- c) Dla opisu ruchu postępowego bryły wystarczy podać równanie ruchu jednego punktu bryły, np. początku ruchomego układu współrzędnych O' , $\mathbf{r}_{O'} = \mathbf{r}_{O'}(t)$.

5.3.4. Ruch obrotowy

Ruch bryły sztywnej nazywamy obrotowym, jeżeli istnieje jedna prosta związana z bryłą, której punkty w czasie ruchu pozostają w spoczynku.



Rys. 5.9. Ruch obrotowy bryły sztywnej wokół stałej osi obrotu

Załóżmy, że osią obrotu jest oś z' . Dla ułatwienia rozważań przyjmijmy układ współrzędnych związany z bryłą tak, aby oś z' pokrywała się z osią z układu nieruchomego oraz aby jego początek O' znajdował się w punkcie O , jak na rys. 5.9.

Ponieważ wektor $\mathbf{k}' = \text{const}$, co wynika z pokrywania się osi z' z osią obrotu, jego pochodna względem czasu jest równa zero. Zatem z wyrażenia:

$$\frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}' = 0$$

wynika, że wektor $\boldsymbol{\omega}$ leży na osi obrotu. Z osią obrotu pokrywa się również wektor przyspieszenia kąowego $\boldsymbol{\varepsilon}$. W tej sytuacji wektory te można zapisać w następujący sposób:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_z \mathbf{k}' = \omega \mathbf{k}' \quad \text{oraz} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_z \mathbf{k}' = \varepsilon \mathbf{k} . \quad (5.37)$$

Jeżeli kąt między osiami stałą x i ruchomą x' oznaczmy przez φ , to zależność $\varphi = \varphi(t)$ jest równaniem ruchu obrotowego bryły wokół stałej osi. Można wykazać [9], że pochodna względem czasu kąta obrotu φ jest modulem prędkości kąowej, a druga pochodna modulem przyspieszenia kąowego:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} . \quad (5.38)$$

Z rysunku 5.9 widać, że promień wodzący \mathbf{r} punktu M jest równy \mathbf{r}' , ponieważ $\mathbf{r}_{O'} = \mathbf{OO}' = 0$. Tym samym $\mathbf{v}_{O'} = 0$ i $\mathbf{a}_{O'} = 0$. Uwzględnijmy powyższe zależności we wzorach na prędkość (5.32) i przyspieszenie (5.33) punktu w ruchu ogólnym, otrzymamy wzory na prędkość i przyspieszenie dowolnego punktu bryły w ruchu obrotowym wokół stałej osi obrotu:

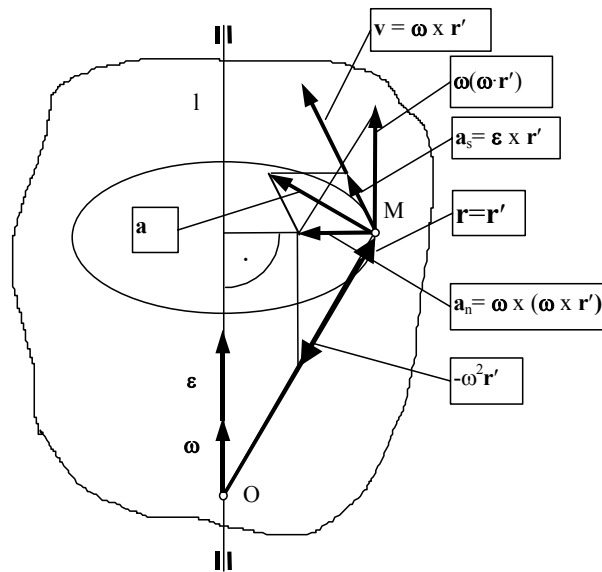
$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' , \quad (5.39)$$

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'). \quad (5.40)$$

Przyśpieszenie można zapisać w postaci:

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}') - \omega^2 \mathbf{r}'. \quad (5.41)$$

Dla ilustracji wektory prędkości przedstawimy na rys. 5.10.



Rys. 5.10. Składowe prędkości i przyśpieszenia w ruchu obrotowym bryły

Na podstawie wzorów (5.39), (5.40) i (5.41) oraz rys. 5.10 możemy sformułować następujące wnioski:

a) Prędkość jest prostopadła do płaszczyzny przechodzącej przez oś obrotu l i punkt M , czyli jest styczna do okręgu zakreślonego przez punkt M .

b) Przyśpieszenie punktu M ma dwie składowe: styczną do toru punktu M , równą $\mathbf{a}_s = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}'$, nazywaną *przyśpieszeniem stycznym*, i normalną, równą $\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$, prostopadłą do $\boldsymbol{\omega}$ i $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$, czyli skierowaną do środka krzywizny toru punktu M , nazywaną *przyśpieszeniem normalnym* lub *dośrodkowym*.

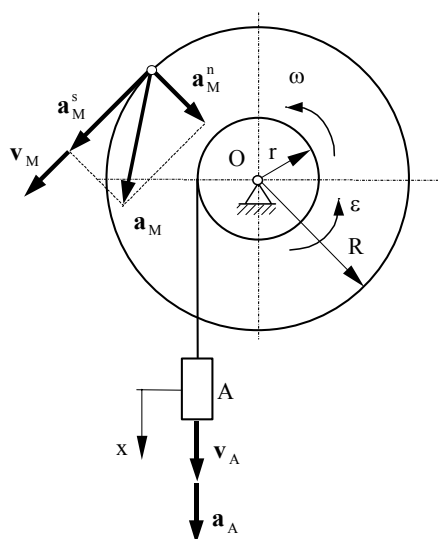
c) Przyśpieszenie normalne można rozłożyć na składową równoległą do osi obrotu $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}')$ i składową skierowaną do obranego punktu O równą $-\omega^2 \mathbf{r}'$.

Gdy punkt odniesienia przyjmiemy w środku okręgu zakreślonego przez punkt M , wtedy składowa przyśpieszenia normalnego równoległa do osi obrotu będzie równa zero, $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}') = 0$, a przyśpieszenie normalne $\mathbf{a}_n = -\omega^2 \mathbf{r}'$. W tym

przypadku moduły prędkości, przyśpieszenia stycznego i normalnego wyrażają proste wzory:

$$v = \omega r', a_s = \epsilon r', a_n = \omega^2 r'. \quad (5.42)$$

Przykład 5.4. Ciężar A zamocowany do linki nawiniętej na mały obwód kołowrotu (rys. 5.11) porusza się w dół ruchem postępowym prostoliniowym



Rys. 5.11. Wyznaczenie prędkości i przyśpieszenia punktu M w ruchu

według równania: $x = 15t^2$, przy czym t jest wyrażony w sekundach, a x w centymetrach. Obliczyć prędkość i przyśpieszenie punktu M leżącego na obwodzie dużego koła kołowrotu. Promienie kołowrotu wynoszą: $R = 60$ cm, $r = 20$ cm.

Rozwiązanie. Prędkość liniowa ciężaru A

$$v_A = \frac{dx}{dt} = 2 \cdot 15t = 30t \text{ cm/s}.$$

Prędkość kątową kołowrotu obliczymy na podstawie pierwszego wzoru (5.42):

$$\omega = \frac{v_A}{r} = \frac{30t}{r} = \frac{3}{2}ts^{-1}.$$

Prędkość liniowa punktu M

$$v_M = \omega R = \frac{30t}{r} R = 30 \frac{R}{r} t = 90t \text{ cm/s}.$$

Przyśpieszenie liniowe ciężaru A jest pochodną jego prędkości względem czasu:

$$a_A = \frac{dv_A}{dt} = 30 \text{ cm/s}^2.$$

Przyśpieszenie kątowe kołowrotu obliczymy na podstawie drugiego wzoru (5.42):

$$\epsilon = \frac{a_A}{r} = \frac{30}{r} = \frac{3}{2} \text{ s}^{-2}.$$

Przyśpieszenie liniowe punktu M jest sumą wektorową składowej stycznej i normalnej:

$$\mathbf{a}_M = \mathbf{a}_M^s + \mathbf{a}_M^n.$$

Wartości tych składowych obliczymy z drugiego i trzeciego wzoru (5.42):

$$a_M^s = \varepsilon R = \frac{3}{2}R = 90\text{cm/s}^2, a_M^n = \omega^2 R = \left(\frac{3}{2}\right)^2 t^2 R = 135t^2 \text{cm/s}^2.$$

Moduł przyspieszenia punktu M

$$a = \sqrt{(a_M^s)^2 + (a_M^n)^2} = \sqrt{90^2 + 135^2 t^4} = 45\sqrt{4 + 9t^4} \text{cm/s}^2.$$

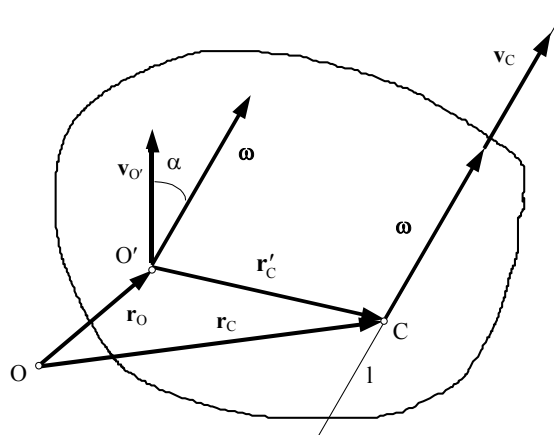
5.3.5. Ruch śrubowy

W punkcie 5.3.2 wykazano, że prędkość dowolnego punktu M bryły w ruchu ogólnym jest sumą dwóch składowych:

- prędkości $\mathbf{v}_{O'}$, która jest prędkością punktu O' (bieguna),
- prędkości $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ wynikającej z ruchu obrotowego bryły z prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$ wokół tego bieguna.

Po zmianie bieguna O' na inny nie zmieni się prędkość kątowa $\boldsymbol{\omega}$, zmianie ulegnie natomiast prędkość bieguna $\mathbf{v}_{O'}$ oraz kąt α zawarty pomiędzy wektorami $\boldsymbol{\omega}$ i $\mathbf{v}_{O'}$ (rys. 5.12). W związku z tym nasuwa się pytanie, czy istnieje taki biegun redukcji C, w którym kąt φ będzie równy zero, czyli wektor \mathbf{v}_C będzie równoległy do wektora prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$. Wykażemy, że dla wszystkich punktów C leżących na prostej l wektory te będą do siebie równoległe.

Znajdowanie takich punktów C, dla których w każdej chwili czasu wektor \mathbf{v}_C jest równoległy do wektora $\boldsymbol{\omega}$, nazywamy sprowadzaniem ruchu ogólnego bryły do ruchu śrubowego.



Rys. 5.12. Ruch śrubowy bryły

Punkt C leży na prostej l równoległej do wektora $\boldsymbol{\omega}$, nazywanej *chwilową osią ruchu śrubowego*.

Dla wyznaczenia prędkości ruchu śrubowego \mathbf{v}_C i położenia chwilowej osi l ruchu śrubowego, $\mathbf{r}'_C = \mathbf{O}'\mathbf{C}$, założymy, że znane są wektory $\mathbf{r}_{O'}$, $\mathbf{v}_{O'}$ i $\boldsymbol{\omega}$. Prędkość punktu C zgodnie z równaniem (5.32) możemy wyrazić wzorem:

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_C. \quad (5.43)$$

Po pomnożeniu powyższego wzoru skalarnie przez $\boldsymbol{\omega}$ otrzymamy:

$$\mathbf{v}_C \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}_{O'} \cdot \boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_C) \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (a)$$

Jeżeli iloczyn mieszany występujący w tym wzorze przedstawimy zgodnie ze wzorem (2.31), to zauważymy, że jest on równy zero.

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_C) \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{r}'_C \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) = 0.$$

W tej sytuacji równanie (a) upraszcza się do postaci

$$\mathbf{v}_C \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}_{O'} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Ponieważ wektory po lewej stronie tego równania są równoległe, na podstawie definicji iloczynu skalarnego można napisać:

$$v_C \boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}_{O'} \cdot \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\omega}. \quad (\text{b})$$

Stąd moduł prędkości v_C punktu C

$$v_C = \mathbf{v}_{O'} \cdot \boldsymbol{\omega} / \omega. \quad (5.44)$$

Prędkość v_C punktu C otrzymamy po pomnożeniu powyższego wzoru przez wektor jednostkowy $\boldsymbol{\omega}/\omega$ o kierunku osi l

$$\mathbf{v}_C = (\mathbf{v}_{O'} \cdot \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega} / \omega^2. \quad (5.45)$$

W celu wyznaczenia wektora \mathbf{r}'_C porównamy stronami wzory (5.43) i (5.45) na prędkość v_C . Otrzymamy wtedy równanie wektorowe:

$$\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_C = (\mathbf{v}_{O'} \cdot \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega} / \omega^2.$$

Po przeniesieniu prędkości $\mathbf{v}_{O'}$ na prawą stronę i sprowadzeniu do wspólnego mianownika mamy:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_C = [(\mathbf{v}_{O'} \cdot \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{v}_{O'}] / \omega^2$$

lub

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_C = [\boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}_{O'} \cdot \boldsymbol{\omega}) - \mathbf{v}_{O'}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})] / \omega^2.$$

W porównaniu ze wzorem (2.34) łatwo zauważyć, że wyrażenie występujące w nawiasie kwadratowym po prawej stronie tego równania jest rozwinięciem podwójnego iloczynu wektorowego. Zatem równanie to możemy zapisać w taki sposób:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_C = [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{O'})] / \omega^2. \quad (5.46)$$

W powyższym równaniu wektorowym jest tylko jedna niewiadoma \mathbf{r}'_C . Łatwo zauważyć, że rozwiązanie ogólne tego równania ma postać:

$$\mathbf{r}'_C = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{O'}) / \omega^2 + \lambda \boldsymbol{\omega}, \quad (5.47)$$

gdzie λ jest dowolną wielkością dodatnią lub ujemną.

Wzór ten opisuje położenie wszystkich punktów C leżących na prostej równoległej do prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$. Jest to więc szukane równanie chwilowej osi I ruchu śrubowego w układzie ruchomym (związany z bryłą). W układzie współrzędnych x', y', z' równanie to możemy zapisać w postaci trzech równoważnych parametrycznych równań skalarnych:

$$\left. \begin{aligned} x'_C &= \frac{\omega_{y'} v_{O'z'} - \omega_{z'} v_{O'y'}}{\omega^2} + \lambda \omega_{x'}, \\ y'_C &= \frac{\omega_{z'} v_{O'x'} - \omega_{x'} v_{O'z'}}{\omega^2} + \lambda \omega_{y'}, \\ z'_C &= \frac{\omega_{x'} v_{O'y'} - \omega_{y'} v_{O'x'}}{\omega^2} + \lambda \omega_{z'}. \end{aligned} \right\} \quad (5.48)$$

Na rysunku 5.12 widzimy, że położenie każdego punktu C chwilowej osi ruchu śrubowego w układzie nieruchomym wyznacza promień wodzący \mathbf{r} , który można przedstawić w postaci sumy wektorów $\mathbf{r}_{O'}$ i \mathbf{r}'_C . Po uwzględnieniu wzoru (5.47) wektorowe równanie chwilowej osi ruchu śrubowego w układzie nieruchomym będzie miało postać:

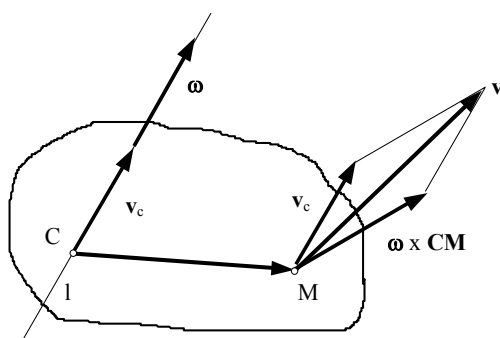
$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}'_C = \mathbf{r}_{O'} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{O'}) / \omega^2 + \lambda \boldsymbol{\omega}. \quad (5.49)$$

Temu równaniu w układzie nieruchomym będą odpowiadały trzy parametryczne równania. W tym celu wektory występujące w równaniu (5.49) należy wyrazić w układzie współrzędnych x, y, z :

$$\left. \begin{aligned} x_C &= x_{O'} + \frac{\omega_y v_{O'z} - \omega_z v_{O'y}}{\omega^2} + \lambda \omega_x, \\ y_C &= y_{O'} + \frac{\omega_z v_{O'x} - \omega_x v_{O'z}}{\omega^2} + \lambda \omega_y, \\ z_C &= z_{O'} + \frac{\omega_x v_{O'y} - \omega_y v_{O'x}}{\omega^2} + \lambda \omega_z. \end{aligned} \right\} \quad (5.50)$$

Wykazaliśmy tym samym, że ruch ogólny bryły można w dowolnej chwili sprowadzić do ruchu śrubowego zdefiniowanego na wstępie tego punktu. Ruch ten jest sumą dwóch ruchów prostych:

- a) obrotowego z prędkością kątową ω wokół chwilowej osi ruchu śrubowego,
 b) postępowego z prędkością v_C wzdłuż tej osi.



Rys5.13. Złożenie ruchu ogólnego bryły z ruchu obrotowego wokół chwilowej osi ruchu śrubowego i ruchu postępowego wzdłuż tej osi

Jeżeli zamiast dowolnego bieguna O' obierzemy biegun redukcji C leżący na chwilowej osi l ruchu śrubowego (rys. 5.13), to prędkość v dowolnego punktu M bryły będzie sumą dwóch wzajemnie prostopadłych składowych: postępowej v_C i obrotowej $\omega \times \mathbf{CM}$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \omega \times \mathbf{CM}.$$

Analizując ruch śrubowy bryły, możemy rozróżnić dwa przypadki:

- a) $v_C(t) \neq 0$; wtedy najprostszym ruchem bryły jest chwilowy ruch śrubowy; nie będziemy się tu nim zajmować;
 b) $v_C(t) = 0$; wtedy – jak to widać na rys. 5.12 i 5.13 – ruch bryły sprowadza się do chwilowego obrotu wokół osi l , którą będziemy nazywać *chwilową osią obrotu*.

5.3.6. Chwilowe osie obrotu

Jak już powiedziano wyżej, jeżeli ruch śrubowy bryły sprowadza się do przypadku, w którym w każdej chwili prędkość $\mathbf{v}_C(t) = 0$, to jej ruch chwilowy jest obrotem wokół chwilowej osi obrotu. Jeżeli założymy, że ruch ogólny bryły opisuje prędkość $\mathbf{v}_{O'}$ bieguna O' oraz prędkość kątową $\boldsymbol{\omega}$, to ze wzoru (5.44) wynika zależność:

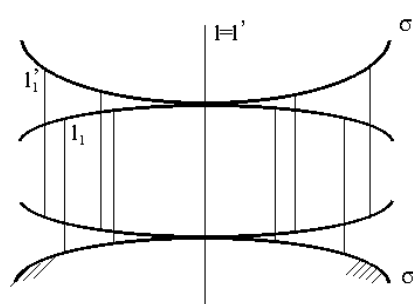
$$\mathbf{v}_{O'} \cdot \boldsymbol{\omega} / \omega = 0.$$

Zatem iloczyn skalarny $\mathbf{v}_{O'} \cdot \boldsymbol{\omega}$ w każdej chwili ruchu musi być równy zeru:

$$\mathbf{v}_{O'}(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = 0, \quad (5.51)$$

stąd wniosek, że aby ruch bryły sprowadzał się do chwilowych obrotów, wektory te muszą być w każdej chwili prostopadłe.

Chwilowa oś obrotu zmienia swoje położenie w czasie. Wzorami określającymi położenie chwilowej osi obrotu względem ruchomego układu współrzędnych (bryły) są wzory (5.47) lub (5.48), a względem układu nieruchomego wzory (5.49) lub (5.50). Jeżeli chwilowa oś nie przemieszcza się w czasie, to ruch bryły jest omówionym już w p. 5.3.4 ruchem obrotowym wokół stałej osi obrotu.



Rys. 5.14. Chwilowe osie obrotu. Aksoidy

Jeżeli dla dowolnej chwili t wykreślimy dwie pokrywające się chwilowe osie obrotu – l w układzie stałym i l' w układzie ruchomym (w bryle) – to po czasie Δt osie te przestaną się pokrywać, a chwilowymi osiami obrotu będą inne dwie proste l_1 i l_1' (rys. 5.14). Przemierzające się w czasie ruchu bryły chwilowe osie obrotu zakreszą dwie powierzchnie prostokreślne:

- aksoidę stałą σ , która jest śladem przemieszczania się chwilowej osi obrotu w układzie nieruchomym,
- aksoidę ruchomą σ' , która jest śladem przemieszczania się chwilowej osi obrotu l' w układzie ruchomym.

Równania aksoid otrzymamy z równań chwilowej osi obrotu. W celu otrzymania aksoidy stałej σ należy do równań (5.49) lub (5.50) wstawić funkcje czasu:

$$\mathbf{r}_{O'} = \mathbf{r}_{O'}(t), \quad \mathbf{v}_{O'} = \mathbf{v}_{O'}(t) \quad \text{i} \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t) \quad (\text{a})$$

wyrażone we współrzędnych układu nieruchomego x, y, z . Podczas zmiany czasu t chwilowa oś zakreśli powierzchnię, którą nazwalismy aksoidą stałą σ .

Podobnie otrzymamy równanie aksoidy ruchomej σ' . Należy w tym celu do równań (5.47) albo (5.48) podstawić dwie z trzech funkcji (a), np. $\mathbf{v}_{O'}$ i $\boldsymbol{\omega}$, wyrażone w ruchomym układzie współrzędnych x', y', z' .

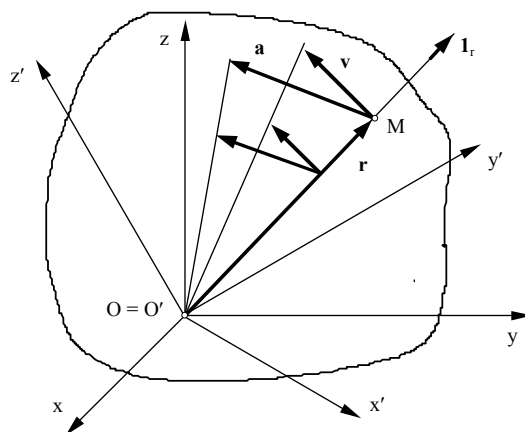
W czasie ruchu bryły obie aksoidy są do siebie styczne wzdłuż chwilowej osi obrotu l . Ponieważ wszystkie punkty leżące na tej osi mają prędkość równą zero, $\mathbf{v}_C = 0$, ruch bryły można rozpatrywać jako ruch spowodowany toczeniem się bez poślizgu aksoidy ruchomej σ' po aksoidzie nieruchomej σ .

W zależności od rodzaju ruchu bryły chwilowe osie obrotu mogą zakreślić różne powierzchnie (aksoidy):

- a) stożkowe (utworzone z prostych przecinających się w jednym punkcie), wtedy ruch chwilowy jest ruchem kulistym,
- b) walcowe (utworzone z prostych równoległych), wtedy ruch chwilowy jest ruchem płaskim,
- c) inne.

5.3.7. Ruch kulisty

Ruchem kulistym nazywamy taki ruch bryły, w czasie którego jeden z punktów z nią związanych jest nieruchomy.



Rys. 5.15. Ruch kulisty bryły sztywnej

Punkt ten nazywamy środkiem ruchu kulistego. Wobec tego prędkość tego punktu będzie stale równa zero, czyli musi on w każdej chwili czasu leżeć jednocześnie na aksoidzie ruchomej i nieruchomej. Zatem obie aksoidy w ruchu kulistym są toczącymi się po sobie stożkami o wspólnym wierzchołku.

Dla uproszczenia rozważań początki O i O' układów współrzędnych ruchomego x', y', z' i nieruchomego x, y, z przyjmujemy w nieruchomym punkcie bryły (rys. 5.15). Przyjęcie takich układów sprawia, że wektor $\mathbf{r}_{O'}$ będzie równy zero, $\mathbf{r}_{O'} = \mathbf{OO}' = 0$. W tej sytuacji równe zero będą również prędkość $\mathbf{v}_{O'}$ i przyspieszenie $\mathbf{a}_{O'}$ punktu O' :

$$\mathbf{v}_{O'} = 0 \quad \text{i} \quad \mathbf{a}_{O'} = 0, \quad (a)$$

a promień wodzący dowolnego punktu M bryły możemy zapisać tak:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}'. \quad (b)$$

Po uwzględnieniu zależności (a) i (b) we wzorach (5.32) i (5.33) dla ruchu ogólnego bryły otrzymamy wzory na prędkość \mathbf{v} i przyspieszenie \mathbf{a} dowolnego punktu M bryły w ruchu kulistym:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (5.52)$$

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (5.53)$$

Dla bryły sztywnej odległość między punktami O i M jest zawsze stała, czyli moduł wektora wodzącego jest również stały:

$$|\mathbf{r}| = |\mathbf{r}'| = r = \text{const}. \quad (c)$$

Wobec tego wektor wodzący \mathbf{r} możemy zapisać jako iloczyn modułu i wektora jednostkowego $\mathbf{1}_r$:

$$\mathbf{r} = r \mathbf{1}_r. \quad (d)$$

Po uwzględnieniu tej zależności we wzorach (5.46) i (5.47) na prędkość i przyspieszenie otrzymamy:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = r(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{1}_r), \quad (5.54)$$

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = r[(\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{1}_r) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{1}_r)]. \quad (5.55)$$

Z powyższych wzorów wynika, że w ruchu kulistym prędkość i przyspieszenie są opisane dwoma wielkościami kinematycznymi $\boldsymbol{\omega}$ i $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Na podstawie wzoru (c) oraz wzorów (5.54) i (5.55) możemy sformułować wnioski charakteryzujące ruch kulisty:

a) W ruchu kulistym toru wszystkich punktów bryły leżą na powierzchniach kul o środku w punkcie O.

b) Wektory prędkości i przyspieszeń punktów leżących na prostej przechodzącej przez punkt O są do siebie równoległe, a ich moduły są proporcjonalne do odległości r od środka ruchu kulistego.

W tym punkcie podano jedynie wektorowe wzory na prędkość i przyspieszenie dowolnego punktu bryły w ruchu kulistym oraz ogólne własności tego ruchu. Przy bardziej szczegółowym rozpatrywaniu ruchu kulistego bryły do określenia położenia ruchomego układu współrzędnych x', y', z' względem nieruchomego układu współrzędnych x, y, z wprowadza się tzw. trzy kąty Eulera (obrotu własnego, precesji i nutacji), których znaczenie można znaleźć w odpowiedniej literaturze, np. [7, 16]. Za pomocą tych kątów można wyrazić wszystkie kosinusy kierunkowe między osiami obu układów współrzędnych oraz wszystkie wielkości występujące we wzorach (5.52) i (5.53).

5.3.8. Ruch płaski bryły

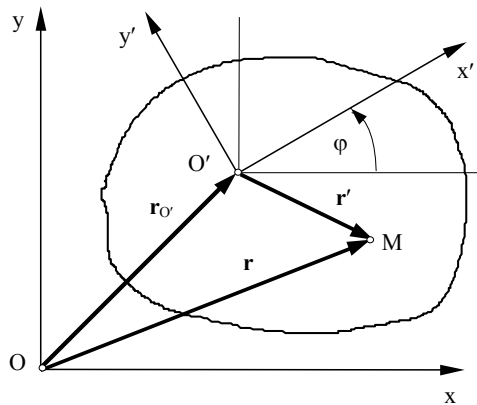
Prędkość i przyspieszenie dowolnego punktu bryły

Ruchem płaskim nazywamy taki ruch, w którym tory wszystkich punktów bryły są równoległe do pewnej płaszczyzny nazywanej płaszczyzną ruchu.

Za płaszczyzną ruchu można przyjąć dowolną płaszczyznę spośród wszystkich płaszczyzn do niej równoległych.

W punkcie 5.3.6 powiedziano, że jeżeli aksoidy są powierzchniami walcowymi, to ruch ogólny bryły sprowadza się do ruchu płaskiego. I rzeczywiście, każda płaszczyzna prostopadła do tworzących obu aksoid może być płaszczyzną ruchu. Ponieważ aksoidy są powierzchniami zakreślonymi przez chwilową oś obrotu w czasie przemieszczania się jej w układzie nieruchomym i ruchomym, jest oczywiste, że chwilowa oś obrotu w ruchu płaskim będzie w każdej chwili prostopadła do płaszczyzny ruchu.

Z definicji ruchu płaskiego wynika, że wektory prędkości i przyspieszenia wszystkich punktów bryły są również równoległe do płaszczyzny ruchu. Z kolei wektor prędkości kątowej ω będzie w każdej chwili równoległy do tworzących aksoid (równoległy do chwilowej osi obrotu), czyli prostopadły do płaszczyzny ruchu.



Rys. 5.16. Ruch płaski bryły sztywnej

W dalszych rozważaniach dotyczących ruchu płaskiego za płaszczyznę ruchu przyjmijmy płaszczyznę wyznaczoną przez nieruchomy układ współrzędnych x, y o początku w punkcie O . Ruchomy układ współrzędnych o osiach x', y' i początku w dowolnym biegunie O' będzie się poruszał w płaszczyźnie ruchu (rys. 5.16). W tej sytuacji osie z i z' będą równoległe do wektora prędkości kątowej ω .

Z rysunku 5.16 wynika, że do jednoznacznego określenia położenia bryły względem układu nieruchomego x, y należy podać wektor wodzący $\mathbf{r}_{O'} = \mathbf{r}_{O'}(t)$ bieguna O' oraz kąt obrotu $\varphi = \varphi(t)$

układu ruchomego x', y' względem nieruchomego. Wektor wodzący $\mathbf{r}_{O'}$ możemy zapisać w następujący sposób:

$$\mathbf{r}_{O'} = \mathbf{r}_{O'}(t) = x_{O'} \mathbf{i} + y_{O'} \mathbf{j}. \quad (5.56)$$

Zatem kinematyczne równania ruchu płaskiego możemy zapisać w postaci trzech funkcji algebraicznych: dwóch współrzędnych wektora $\mathbf{r}_{O'}$ oraz kąta φ :

$$x_{O'} = x_{O'}(t), \quad y_{O'} = y_{O'}(t), \quad (5.57)$$

$$\varphi = \varphi(t). \quad (5.58)$$

Do obliczenia prędkości \mathbf{v} i przyspieszenia \mathbf{a} dowolnego punktu M bryły wykorzystamy wzory (5.32) i (5.34):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \omega \times \mathbf{r}', \quad (5.59)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{O'} + \epsilon \times \mathbf{r}' + \omega(\omega \cdot \mathbf{r}') - \omega^2 \mathbf{r}'. \quad (5.59a)$$

Ponieważ w ruchu płaskim wektory ω i \mathbf{r}' są prostopadłe, zatem ich iloczyn skalarny występujący we wzorze (5.59a) jest równy zeru ($\omega \cdot \mathbf{r}' = 0$), a więc wzór ten uprości się do postaci:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{O'} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' - \omega^2 \mathbf{r}' . \quad (5.60)$$

We wzorach (5.59) i (5.60) prędkość $\mathbf{v}_{O'}$ i przyspieszenie $\mathbf{a}_{O'}$ początku O' układu ruchomego otrzymamy, obliczając odpowiednio pierwsze i drugie pochodne wektora wodzącego $\mathbf{r}_{O'}$ względem czasu:

$$\mathbf{v}_{O'} = \frac{d\mathbf{r}_{O'}}{dt} = \frac{dx_{O'}}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy_{O'}}{dt} \mathbf{j}, \quad (5.61)$$

$$\mathbf{a}_{O'} = \frac{d\mathbf{v}_{O'}}{dt} = \frac{d^2x_{O'}}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2y_{O'}}{dt^2} \mathbf{j}. \quad (5.62)$$

Prędkość kątową $\boldsymbol{\omega}$ i przyspieszenie kątowe $\boldsymbol{\varepsilon}$ można zapisać analogicznie jak w ruchu obrotowym (wzór 5.37):

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_z \mathbf{k}' = \omega \mathbf{k} \text{ oraz } \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_z \mathbf{k}' = \varepsilon \mathbf{k}. \quad (5.63)$$

Moduły tych przyspieszeń, podobnie jak w ruchu obrotowym (5.63), będą również odpowiednimi pochodnymi kąta obrotu φ względem czasu:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (5.64)$$

Ze wzorów (5.63) wynika, że prędkość kątowa $\boldsymbol{\omega}$ i przyspieszenie kątowe $\boldsymbol{\varepsilon}$ są wektorami o znanym kierunku. W tej sytuacji można je uważać za skalary, podobnie jak w statyce moment siły względem osi i moment płaskiego układu sił.

Ze wzorów (5.59) i (5.60) na prędkość \mathbf{v} i przyspieszenie \mathbf{a} można wyciągnąć następujące wnioski:

a) Prędkość dowolnego punktu bryły w ruchu płaskim jest sumą prędkości postępowej $\mathbf{v}_{O'}$ dowolnego bieguna O' i prędkości wynikającej z chwilowego obrotu bryły wokół tego bieguna: $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$.

b) W ruchu płaskim przyspieszenie dowolnego punktu bryły jest sumą przyspieszenia $\mathbf{a}_{O'}$ dowolnego bieguna O' i przyspieszenia wynikającego z chwilowego obrotu bryły wokół tego bieguna: $\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' - \omega^2 \mathbf{r}'$.

Wyprowadzone wzory na prędkość i przyspieszenie dowolnego punktu M brył w ruchu płaskim przedstawimy w postaci bardziej przydatnej do rozwiązywania równań z kinematyki ruchu płaskiego. Założymy, że znana jest prędkość \mathbf{v}_A punktu A i chwilowa prędkość obrotowa ω , a chcemy obliczyć prędkość i przyspieszenie dowolnego punktu B bryły (rys. 5.17).

Gdy początek układu ruchomego przyjmiemy w punkcie A , a wektor o początku w punkcie A i końcu w punkcie B oznaczymy jako $\mathbf{AB} = \mathbf{r}_{AB}$, to na podstawie wzoru (5.59) prędkość punktu B bryły

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} \quad \text{lub} \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}, \quad (5.65)$$

gdzie

$$\mathbf{v}_{BA} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} \quad (a)$$

jest prędkością punktu B względem punktu A , której wektor jest prostopadły do wektora \mathbf{r}_{AB} , wynikającą z chwilowego obrotu bryły wokół punktu A z prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$. Zatem jej moduł obliczymy ze wzoru:

$$v_{BA} = \omega r_{AB}. \quad (b)$$

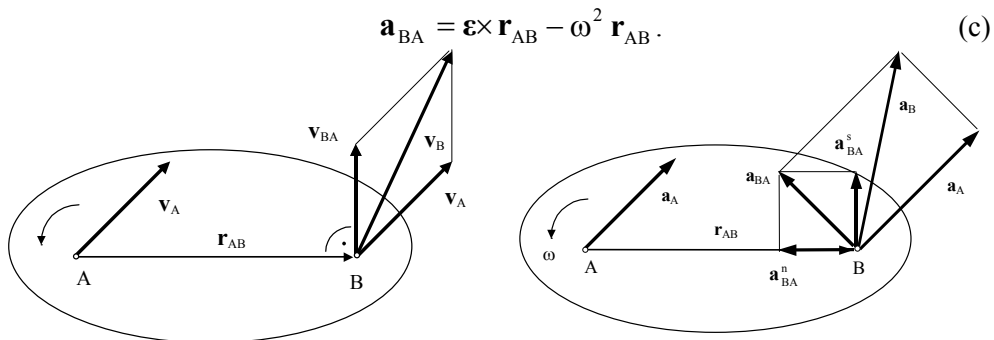
Podobnie na podstawie wzoru (5.60) przyśpieszenie punktu B (rys. 5.18) możemy zapisać w następujący sposób:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{AB} - \omega^2 \mathbf{r}_{AB}$$

albo

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA} \quad (5.66)$$

Przyśpieszenie \mathbf{a}_{BA} jest przyśpieszeniem punktu B względem punktu A spowodowanym chwilowym obrotem bryły wokół bieguna A:



Rys. 5.17. Wyznaczanie prędkości punktu B bryły sztywnej metodą superpozycji

Rys. 5.18. Wyznaczanie przyśpieszenia punktu B bryły sztywnej metodą superpozycji

Z powyższego wzoru wynika, że przyśpieszenie to możemy rozłożyć na dwie składowe: przyśpieszenie styczne \mathbf{a}_{BA}^s i przyśpieszenie normalne \mathbf{a}_{BA}^n .

$$\mathbf{a}_{BA} = \mathbf{a}_{BA}^s + \mathbf{a}_{BA}^n, \quad (5.67)$$

gdzie

$$\mathbf{a}_{BA}^s = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{AB} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{a}_{BA}^n = \omega^2 \mathbf{r}_{AB}. \quad (5.68)$$

Moduły tych przyśpieszeń są następujące:

$$a_{BA}^s = \varepsilon r_{AB}, \quad a_{BA}^n = \omega^2 r_{AB}. \quad (5.69)$$

Wektor przyśpieszenia stycznego \mathbf{a}_{BA}^s jest skierowany prostopadle do wektora \mathbf{r}_{AB} , czyli ma taki sam kierunek jak wektor prędkości \mathbf{v}_{BA} (rys. 5.17), a wektor przyśpieszenia normalnego (dośrodkowego) \mathbf{a}_{BA}^n jest skierowany wzdłuż prostej AB w stronę punktu A.

Po podstawieniu zależności (5.67) do wzoru (5.66) przyśpieszenie punktu B możemy zapisać w postaci:

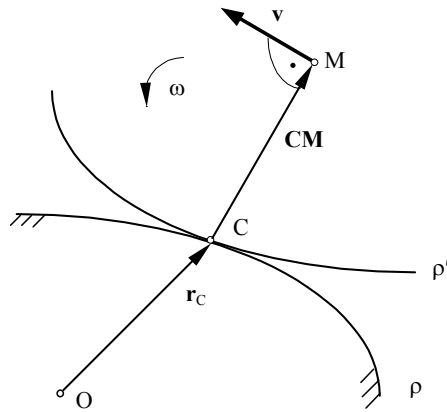
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^s + \mathbf{a}_{BA}^n. \quad (5.70)$$

Podczas praktycznego rozwiązywania zadań nie wszystkie wielkości występujące we wzorze (5.70) będzie można obliczyć bezpośrednio. Bardzo często niewiadomymi będą moduły przyśpieszeń a_B i a_{BA}^s . Jeżeli wzór (5.70) potraktujemy jako równanie wektorowe o dwóch niewiadomych, to wiadomo, że dla wektorów leżących w jednej płaszczyźnie dwie niewiadome można wyznaczyć

z wieloboku wektorów (przyśpieszeń) albo z dwóch równoważnych wektorowemu równań algebraicznych.

Chwilowy środek obrotu

Na wstępie tego punktu powiedziano, że w ruchu płaskim bryły chwilowa oś obrotu jest w każdej chwili prostopadła do płaszczyzny ruchu. Punkt przecięcia przez chwilową oś obrotu płaszczyzny ruchu będziemy nazywać *chwilowym środkiem obrotu*. Albo inaczej, chwilowy środek obrotu to taki punkt, którego prędkość w danej chwili jest równa zero.



Wiemy, że w czasie ruchu płaskiego bryły chwilowa oś obrotu zmienia swoje położenie, a w ślad za nią będzie się przemieszczał chwilowy środek obrotu. W czasie przemieszczania się chwilowy środek obrotu C

(rys. 5.19) zakreśli dwie krzywe:

- centroidę ruchomą ρ' w układzie ruchomym,
- centroidę stałą ρ w układzie nieruchomym.

Rys. 5.19. Chwilowy środek obrotu. Centroidy

Po podstawieniu do równań (5.47) i (5.49) chwilowej osi obrotu $\lambda = 0$ otrzymamy wektorowe wzory na położenie chwilowego środka obrotu w układzie ruchomym:

$$\mathbf{r}'_C = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{O'}) / \omega^2 \quad (5.71)$$

i w układzie nieruchomym:

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}'_C = \mathbf{r}_{O'} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{O'}) / \omega^2. \quad (5.72)$$

Odpowiednie równania centroid otrzymamy przez wstawienie do tych wzorów funkcji

$$\mathbf{r}_{O'} = \mathbf{r}_{O'}(t), \quad \mathbf{v}_{O'} = \mathbf{v}_{O'}(t) \quad \text{i} \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t).$$

Mając wyznaczony chwilowy środek obrotu C, można obliczyć prędkość dowolnego punktu M bryły. Jeżeli biegun redukcji przyjmiemy w chwilowym środku obrotu C, a nie w dowolnym punkcie O' (rys. 5.19), to prędkość dowolnego punktu M bryły możemy wyrazić wzorem:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{CM}.$$

Ponieważ z założenia prędkość punktu C jest równa zero ($\mathbf{v}_C = 0$), więc prędkość punktu M będzie opisana wzorem:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{CM}. \quad (5.73)$$

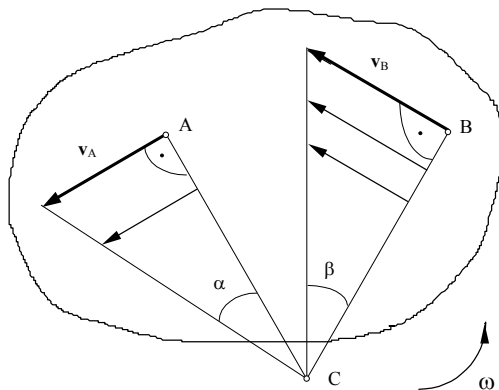
Z otrzymanego wzoru wynika, że prędkość dowolnego punktu M bryły jest prostopadła do prostej łączącej punkt M z chwilowym środkiem obrotu C. Ponadto występujące w tym wzorze wektory $\boldsymbol{\omega}$ i \mathbf{CM} są prostopadłe, więc moduł prędkości

$$v = \omega CM, \quad (5.74)$$

czyli jest proporcjonalny do odległości CM punktu M od chwilowego środka obrotu.

Z powyższych rozważań oraz z otrzymanych wzorów wynikają następujące wnioski:

- a) Ruch płaski bryły można sprowadzić do toczenia się bez poślizgu centroidy ruchomej po nieruchomej.
- b) Ruch płaski bryły można w każdej chwili rozpatrywać jako chwilowy ruch obrotowy wokół chwilowego środka obrotu.



Rys. 5.20. Wyznaczanie chwilowego środka obrotu

Ze wzoru (5.73) wynika, że chwilowy środek obrotu C leży na prostej prostopadłej do wektora prędkości v dowolnego punktu M bryły. Zatem do wyznaczenia chwilowego środka obrotu wystarczy znajomość kierunków prędkości dwóch punktów bryły. Będzie on leżał w miejscu przecięcia prostych prostopadłych do kierunków prędkości punktów A i B (rys. 5.20).

Mając już wyznaczony punkt C, wartości prędkości punktów A i B obliczymy ze wzoru (5.74):

$$v_A = \omega AC \text{ i } v_B = \omega BC. \tag{d}$$

Dla znanej wartości v_A z pierwszego wzoru obliczymy chwilową prędkość obrotową ω :

$$\omega = \frac{v_A}{AC},$$

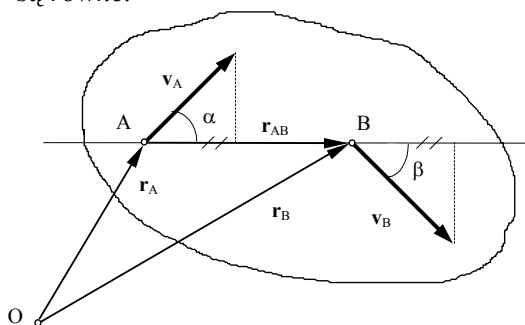
a następnie możemy wyznaczyć moduł prędkości v_B punktu B. Na podstawie rys. 5.20 po uwzględnieniu wzorów (d) możemy napisać:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_A}{AC} = \omega \frac{AC}{AC} = \omega \text{ oraz } \operatorname{tg} \beta = \frac{v_B}{BC} = \omega \frac{BC}{BC} = \omega.$$

Wynika stąd wniosek, że z chwilowego środka obrotu wektory prędkości wszystkich punktów bryły widać pod tym samym kątem $\alpha = \beta$.

Twierdzenie o rzutach prędkości

Rzuty wektorów prędkości dwóch punktów bryły sztywnej na prostą przechodzącą przez te punkty są równe.



Dowód

Na rysunku 5.21 zaznaczono wektory prędkości v_A i v_B dwóch punktów A i B bryły sztywnej, a promienie łączące nieruchomy punkt O z tymi punktami przez r_A i r_B . Wektor r_{AB} łączący punkt A z punktem B w czasie ruchu bryły może zmieniać swój kierunek,

Rys. 5.21. Rzuty prędkości dwóch punktów bryły sztywnej na prostą AB

ale jego długość pozostaje stała: $|\mathbf{r}_{AB}| = r_{AB} = \text{const}$. Zatem iloczyn skalarny

$$\mathbf{r}_{AB} \cdot \mathbf{r}_{AB} = r_{AB}^2 = \text{const}. \quad (\text{e})$$

Po zróżniczkowaniu tego wyrażenia względem czasu otrzymamy:

$$\frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt} \cdot \mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_{AB} \cdot \frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt} = 0$$

lub

$$\frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt} \cdot \mathbf{r}_{AB} = 0, \quad (\text{f})$$

ponieważ pochodna prawej strony równania (e) jest równa zero. Z rysunku widać, że:

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{AB}, \quad \text{skąd } \mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A.$$

Po zróżniczkowaniu tego wyrażenia względem czasu mamy:

$$\frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_A}{dt}.$$

Ale pochodne promieni wodzących punktów A i B są równe prędkościom tych punktów \mathbf{v}_A i \mathbf{v}_B , czyli

$$\frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A.$$

Podstawiając powyższą zależność do równania (f) otrzymujemy:

$$(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{r}_{AB} = 0 \quad \text{lub} \quad \mathbf{v}_B \cdot \mathbf{r}_{AB} = \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{r}_{AB},$$

a po rozpisaniu iloczynów skalarnych

$$v_B r_{AB} \cos \beta = v_A r_{AB} \cos \alpha.$$

Po skróceniu przez r_{AB} mamy:

$$v_B \cos \beta = v_A \cos \alpha. \quad (5.75)$$

Iloczyny występujące w tej równości są odpowiednio rzutami wektorów prędkości \mathbf{v}_A i \mathbf{v}_B na prostą łączącą punkty A i B. Tym samym udowodniliśmy twierdzenie o rzutach wektorów prędkości dwóch punktów bryły sztywnej na prostą łączącą te punkty.

Na podstawie tego twierdzenia można w łatwy sposób obliczać prędkość w niektórych prostych zadaniach z kinematyki ruchu płaskiego.

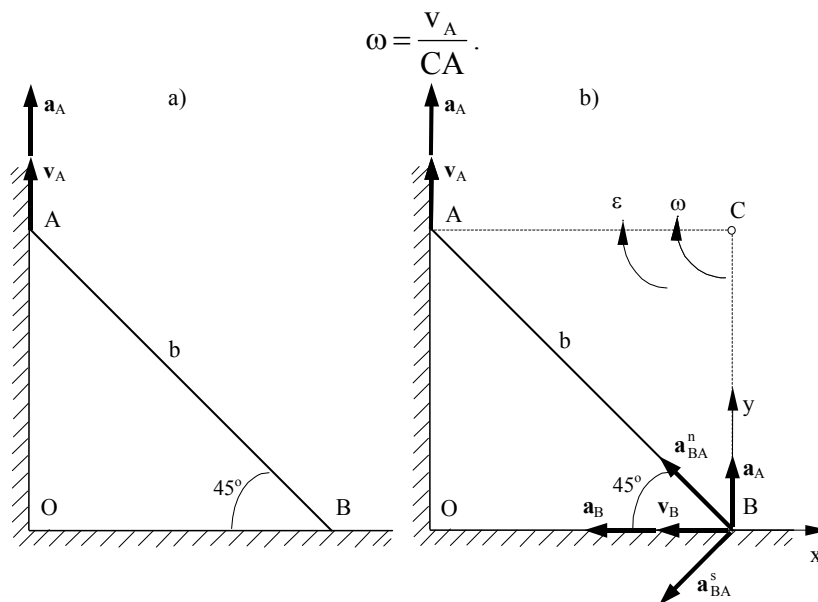
Przykład 5.5. Końce pręta AB ślizgają się po dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyznach (rys. 5.22a). Koniec A porusza się z prędkością $v_A = 10 \text{ cm/s}$ i przyspieszeniem $a_A = 15 \text{ cm/s}^2$. Obliczyć prędkość i przyspieszenie końca B oraz przyspieszenie kątowe pręta AB w położeniu jak na rys. 5.22a, jeżeli długość pręta $AB = b = 20 \text{ cm}$.

Rozwiązanie. Prędkość punktu B obliczymy, rozpatrując ruch pręta AB jako chwilowy ruch obrotowy wokół chwilowego środka obrotu. Znamy prędkość końca A pręta i kierunek prędkości końca B, która jest skierowana wzdłuż prostej OB. Chwilowy środek obrotu C znajduje się na przecięciu prostopadłych do kierunków wektorów prędkości \mathbf{v}_A i \mathbf{v}_B (rys. 5.22b). Oznaczywszy przez

wartość liczbową prędkości kątowej pręta AB w rozpatrywanym położeniu, na podstawie wzoru (5.74) mamy:

$$v_A = \omega \cdot CA, \quad v_B = \omega \cdot CB. \quad (a)$$

Z pierwszego wzoru otrzymujemy:



Rys. 5.22. Wyznaczenie prędkości i przyspieszenia punktu B pręta AB

Z rysunku 5.22b znajdujemy

$$AC = BC = b \cos 45^\circ = b \frac{1}{2} \sqrt{2} = 20 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} = 10\sqrt{2} \text{ cm}.$$

Zatem

$$\omega = \frac{v_A}{CA} = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \text{ s}^{-1}. \quad (b)$$

Z drugiego wzoru (a) mamy:

$$v_B = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} = 10 \text{ cm/s}. \quad (c)$$

Przyspieszenie punktu B obliczymy ze wzoru (5.66). Zgodnie z tym wzorem przyspieszenie punktu B będzie równe sumie geometrycznej przyspieszenia punktu A oraz przyspieszenia punktu B względem A wywołanego przez chwilowy obrót pręta wokół końca A:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}. \quad (d)$$

Po rozłożeniu przyspieszenia punktu B względem punktu A na składową styczną i normalną wzór (d) możemy zapisać w postaci (5.70):

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^s + \mathbf{a}_{BA}^n. \quad (e)$$

Przyspieszenie normalne \mathbf{a}_{BA}^n punktu B względem A działa wzdłuż pręta i jest skierowane do punktu A. Zgodnie z drugim wzorem (5.69)

$$a_{BA}^n = \omega^2 b = \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \right)^2 \cdot 20 = 10 \text{ cm/s}^2.$$

Wartość przyspieszenia stycznego \mathbf{a}_{BA}^s wyraża pierwszy wzór (5.69):

$$\mathbf{a}_{BA}^s = \varepsilon \mathbf{b}. \quad (\text{f})$$

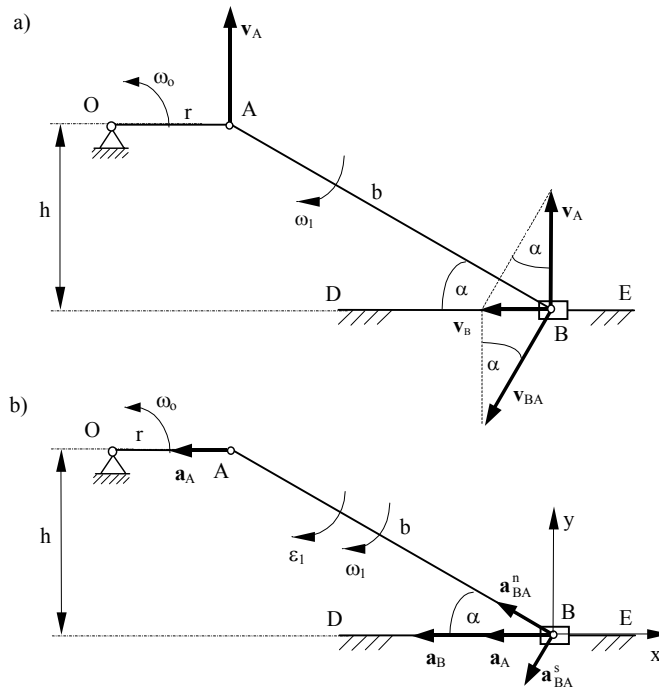
Tego przyspieszenia nie możemy obliczyć bezpośrednio, ponieważ nie znamy wartości przyspieszenia kąowego ε pręta. Znamy jedynie kierunek przyspieszenia \mathbf{a}_{BA}^s , które jest prostopadłe do pręta AB. Poza tym znamy kierunek przyspieszenia całkowitego \mathbf{a}_B , który jest zgodny z prostą OB. Wynika z tego, że w wektorowym równaniu (e) mamy dwie niewiadome wartości przyspieszenia \mathbf{a}_{BA}^s i \mathbf{a}_B . Po przyjęciu w punkcie B prostokątnego układu współrzędnych x, y i zrzutowaniu równania (e) na osie tego układu otrzymamy dwa równania algebraiczne z dwoma niewiadomymi.

$$\begin{aligned} -a_B &= -a_{AB}^n \cos 45^\circ - a_{BA}^s \cos 45^\circ, \\ 0 &= a_A + a_{BA}^n \sin 45^\circ - a_{BA}^s \sin 45^\circ. \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu tego układu równań oraz wykorzystaniu wzoru (f) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} a_{BA}^s &= \frac{a_A + a_{BA}^n \sin 45^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{15 + 10 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2}}{\frac{1}{2} \sqrt{2}} = 5(3\sqrt{2} + 2) \text{ cm / s}^2, \\ a_B &= a_{AB}^n \cos 45^\circ + a_{BA}^s \cos 45^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} + 5(3\sqrt{2} + 2) \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} = \\ &= 5(2\sqrt{2} + 3) \text{ cm / s}^2. \\ \varepsilon &= \frac{a_{BA}^s}{b} = \frac{a_A + a_{BA}^n \sin 45^\circ}{b \sin 45^\circ} = \frac{5(3\sqrt{2} + 2)}{20} = \frac{1}{4}(3\sqrt{2} + 2) \text{ s}^{-1}. \end{aligned}$$

Przykład 5.6. Korba OA mechanizmu korbowo-suwakowego przedstawionego na rys. 5.23a obraca się ze stałą prędkością kątową o wartości ω_0 wokół punktu O. Na końcu B korbowodu AB znajduje się suwak, który porusza się po prowadnicy DE znajdującej się w odległości h od punktu O. Dla położenia przedstawionego na rysunku obliczyć prędkość i przyspieszenie suwaka B oraz przyspieszenie kątowe korbowodu, jeżeli długość korby OA = r, a korbowodu AB = b.



Rys. 5.23. Wyznaczenie prędkości i przyspieszenia punktu B mechanizmu korbowo-suwakowego

Rozwiązanie. Wektor prędkości punktu A jest prostopadły do korby OA, a suwaka B jest skierowany wzdłuż prowadnicy DE (rys. 5.23a). Prędkość punktu B obliczymy ze wzoru (5.65):

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA},$$

gdzie \mathbf{v}_{BA} jest prędkością punktu B względem punktu A wynikającą z chwilowego obrotu korbowodu AB wokół punktu A z prędkością kątową ω_1 . Wektor prędkości \mathbf{v}_{BA} jest prostopadły do korbowodu, jego wartość

$$v_{BA} = \omega_1 b, \quad (a)$$

a wartość prędkości punktu A

$$v_A = \omega_0 r.$$

Z rysunku mamy:

$$\sin\alpha = \frac{b}{h}, \cos\alpha = \frac{\sqrt{b^2 - h^2}}{b}, \operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{\sqrt{b^2 - h^2}}. \quad (b)$$

Zatem z zależności geometrycznych wynikających z rys. 5.23a otrzymujemy:

$$v_B = v_A \operatorname{tg}\alpha = v_A \frac{h}{\sqrt{b^2 - h^2}} = \frac{rh}{\sqrt{b^2 - h^2}} \omega_0, \quad (c)$$

$$v_{BA} = \frac{v_A}{\cos\alpha} = v_A \frac{b}{\sqrt{b^2 - h^2}} = \frac{rb}{\sqrt{b^2 - h^2}} \omega_0.$$

Ze wzoru (a) wyznaczamy prędkość kątową:

$$\omega_1 = \frac{v_{BA}}{b} = \frac{r}{\sqrt{b^2 - h^2}} \omega_0. \quad (d)$$

Przyśpieszenie punktu B przedstawimy w postaci sumy geometrycznej przyśpieszenia punktu A i przyśpieszenia punktu B względem A (wzór 5.70):

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^s + \mathbf{a}_{BA}^n. \quad (e)$$

Przyśpieszenie punktu A jest równe przyśpieszeniu normalnemu, ponieważ przyśpieszenie kątowe korby OA jest równe zeru. Wartość tego przyśpieszenia

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_A^n = \omega_0^2 r.$$

Składowa przyśpieszenia normalnego \mathbf{a}_{BA}^n punktu B względem A pokrywa się z kierunkiem korbowodu AB i jest skierowana w stronę punktu A (rys. 5.23b), a jej wartość

$$\mathbf{a}_{BA}^n = \omega_1 b = \frac{r^2 b}{b^2 - h^2} \omega_0. \quad (f)$$

Przyśpieszenie styczne \mathbf{a}_{BA}^s punktu B względem A jest prostopadłe do korbowodu AB. Wartość tego przyśpieszenia wyraża wzór:

$$\mathbf{a}_{BA}^s = \varepsilon_1 \mathbf{b}. \quad (g)$$

W powyższym wzorze ε_1 jest przyśpieszeniem kątowym korbowodu AB. Przyśpieszenie to nie jest znane, dlatego nie znamy wartości przyśpieszenia stycznego \mathbf{a}_{BA}^s . Drugą niewiadomą w równaniu (e) jest wartość przyśpieszenia całkowitego suwaka \mathbf{a}_B . W celu wyznaczenia tych niewiadomych przyjmiemy w punkcie B prostokątny układ współrzędnych x, y i rzutujemy wektory przyśpieszenia na osie x i y. Otrzymamy:

$$\begin{aligned} -a_B &= -a_A - a_{BA}^n \cos\alpha - a_{BA}^s \sin\alpha, \\ 0 &= a_{BA}^n \sin\alpha - a_{BA}^s \cos\alpha. \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu tego układu równań i uwzględnieniu (b) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} a_{BS}^s &= \frac{r^2 b h}{(b^2 - h^2)^{\frac{3}{2}}} \omega_0^2, \\ a_B &= r \left[1 + \frac{r b^2}{(b^2 - h^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \omega_0^2. \end{aligned}$$

Wartość przyśpieszenia kąтового korbowodu AB

$$\varepsilon_1 = \frac{a_{BA}^s}{b} = \frac{r^2 h}{(b^2 - h^2)^{\frac{3}{2}}} \omega_0^2.$$