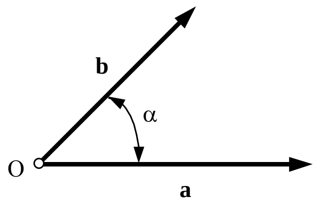
2.3.1. Iloczyn skalarny

Iloczynem skalarnym (skalarowym) dwóch wektorów **a** *i* **b** *nazywamy skalar równy iloczynowi modułów obu wektorów przez kosinus kąta zawartego między nimi.·*



Rys. 2.8. Ilustracja do definicji iloczynu skalarnego

Jeżeli kąt między wektorami oznaczymy przez α (rys. 2.8), a operację mnożenia skalarnego przez **a·b**, to otrzymamy:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathrm{ab}\cos\alpha. \tag{2.11}$$

Po uwzględnieniu we wzorze (2.11) zależności (2.2) iloczyn skalarny możemy przedstawić jako iloczyn rzutu jednego wektora na kierunek drugiego i modułu drugiego.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathrm{a}\left(\mathrm{b}\cos\alpha\right) = \mathrm{b}\left(\mathrm{a}\cos\alpha\right) = \mathrm{a\,Rz_a}\left(\mathrm{b}\right) = \mathrm{bRz_b}\left(\mathrm{a}\right). \tag{2.12}$$

Iloczyn skalarny jest równy zeru (poza przypadkami, gdy **a** = 0 lub **b** = 0), gdy cos? = 0. Wynika stąd *warunek prostopadłości* (ortogonalności) dwóch wektorów:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0, \qquad \text{gdy} \qquad \mathbf{a}\perp\mathbf{b}. \tag{2.13}$$

Z faktu, że funkcja kosinus jest funkcją parzystą [cosα = cos(–α)], wynika, że do iloczynu skalarnego stosuje się prawo przemienności:

$$\mathrm{a}\cdot\mathrm{b} = \mathrm{b}\cdot\mathrm{a}\,.$$

Iloczyn skalarny podlega również prawu rozdzielności mnożenia skalarnego względem dodawania:

$$\mathbf{a}\cdot\left(\mathbf{b}+\mathbf{c}\right) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}.$$

Dowód tej własności wynika bezpośrednio z przytoczonego w poprzednim punkcie twierdzenia Charles'a oraz z zależności (2.2):

$$\mathrm{a}\cdot(\mathrm{b}+\mathrm{c}) = aRz_a(\mathrm{b}+\mathrm{c}) = a[Rz_a(\mathrm{b}) + Rz_a(\mathrm{c})] =$$
$$= aRz_a(\mathrm{b}) + aRz_a(\mathrm{c}) = \mathrm{a}\cdot\mathrm{b} + \mathrm{a}\cdot\mathrm{c}\,.$$

Jeżeli pomnożymy równanie (2.11) przez dowolny skalar k, to otrzymamy prawo łączności mnożenia iloczynu skalarnego przez skalar:

$$\mathrm{k}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\mathrm{ka})\mathrm{b}\cos\alpha = \mathrm{a}(\mathrm{kb})\cos\alpha = (\mathrm{k}\,\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot(\mathrm{k}\,\mathbf{b}).$$

Wektor pomnożony skalarnie przez siebie jest równy kwadratowi modułu:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathrm{a}\,\mathrm{a}\cos 0 = \mathrm{a}^2\,. \tag{2.14}$$

Z podanych wyżej rozważań wynika, że iloczyn skalarny – poza wzorem (2.13) – ma takie same własności jak iloczyn algebraiczny liczb.

Gdy mamy dowolny wektor **a** oraz oś l określoną przez wektor jednostkowy $\mathbf{e}_l$ (rys. 2.3), to na podstawie równania (2.12) rzut tego wektora na oś l wyraża wzór:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_l = \mathrm{a}\cos\alpha = \mathrm{Rz}_l(\mathbf{a}). \tag{2.15}$$

Z zależności tej będziemy często korzystać przy obliczaniu współrzędnych wektora w danym układzie współrzędnych.

Obecnie podamy zależności między wersorami **i**, **j**, **k** prostokątnego układu współrzędnych. Na podstawie wzorów (2.14) i (2.13) otrzymujemy:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1,\\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

Gdy wektory **a** i **b** zapiszemy analitycznie za pomocą ich współrzędnych w prostokątnym układzie współrzędnych x, y, z:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a} = \mathrm{a}_x\,\mathbf{i} + \mathrm{a}_y\,\mathbf{j} + \mathrm{a}_z\,\mathbf{k},\\ \mathbf{b} = \mathrm{b}_x\,\mathbf{i} + \mathrm{b}_y\,\mathbf{j} + \mathrm{b}_z\,\mathbf{k}, \end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

to ich iloczyn skalarny na podstawie wzorów (2.16) można wyrazić przez współrzędne:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathrm{a}_x\mathrm{b}_x + \mathrm{a}_y\mathrm{b}_y + \mathrm{a}_z\mathrm{b}_z\,. \tag{2.18}$$

Porównanie wzorów (2.11) i (2.18) pozwala obliczyć kąt między wektorami:

$$\cos\alpha = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab}. \tag{2.19}$$

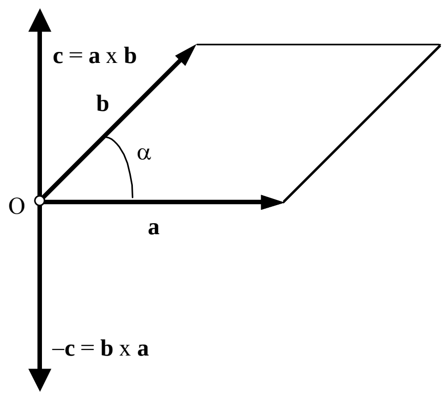
Z tego wzoru wynika, że aby dwa wektory były ortogonalne, ich współrzędne muszą spełniać zależność:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \tag{2.20}$$

2.3.2. Iloczyn wektorowy

Iloczynem wektorowym $a \times b$ *dwóch wektorów* **a** i **b** *nazywamy wektor* **c** *prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez te wektory, którego moduł jest równy iloczynowi modułów tych wektorów pomnożonemu przez sinus kąta zawartego między nimi* (rys. 2.9)

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{c} &= \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \\ c &= ab\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (2.21)$$



Rys. 2.9. Ilustracja iloczynu wektorowego

Zwrot wektora **c** jest tak dobrany, że wektory **a**, **b**, **c** tworzą układ prawoskrętny, czyli zwrot wektora **c** określa reguła śruby prawoskrętnej.

Z określenia modułu iloczynu wektorowego oraz z rys. 2.9 wynika, że jest on równy polu równoległoboku zbudowanego na wektorach **a** i **b**.

Z definicji iloczynu wektorowego wynika, że poza przypadkami, gdy

a = 0 lub **b** = 0, jest on równy zeru,

kiedy $\sin\alpha = 0$, czyli dla $\alpha = 0$ albo $\alpha = \pi$, co oznacza, iż wektor **a** jest równoległy do wektora **b**. Zatem *warunek równoległości* ma postać:

$$a \times b = 0. \qquad (2.22)$$

Jeżeli w iloczynie wektorowym wektory **a** i **b** zamienimy miejscami, to wektory **b**, **a**, **c** będą tworzyły układ lewoskrętny. Aby ponownie otrzymać układ prawoskrętny, należy zmienić zwrot wektora **c** na przeciwny, jak na rys. 2.9, czyli gdy

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}, \quad \text{to} \quad \mathbf{b}\times\mathbf{a}=-\mathbf{c}.$$

Widzimy zatem, że do iloczynu wektorowego nie stosuje się prawo przemienności:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}. \tag{2.23}$$

Można wykazać [6, 9], że iloczyn wektorowy podlega prawu rozdzielności mnożenia wektorowego względem dodawania:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{d})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{d}. \tag{2.24}$$

Do iloczynu wektorowego stosuje się również prawo łączności mnożenia przez dowolny skalar k:

$$(k\,\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times(k\,\mathbf{b})=k(\mathbf{a}\times\mathbf{b}). \tag{2.25}$$

Powyższa równość wynika bezpośrednio z porównania modułów powyższych iloczynów wektorowych.

Iloczyny wektorowe wersorów **i**, **j**, **k** prostokątnego prawoskrętnego układu współrzędnych x, y, z wynikają bezpośrednio ze wzoru (2.22) oraz z definicji iloczynu wektorowego

$$\left.\begin{array}{lll} \mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0, & & \\ \mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}, & \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}, & \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}, \\ \mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k}, & \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}, & \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}. \end{array}\right\} \tag{2.26}$$

Obecnie wyrazimy iloczyn wektorowy dwóch dowolnych wektorów **a** i **b** za pomocą ich współrzędnych w prostokątnym układzie współrzędnych x, y, z. Po podstawieniu zależności (2.17) do wzoru na iloczyn wektorowy mamy:

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_x\,\mathbf{i}+a_y\,\mathbf{j}+a_z\,\mathbf{k})\times(b_x\,\mathbf{i}+b_y\,\mathbf{j}+b_z\,\mathbf{k}).$$

Po wykonaniu działań, wykorzystaniu zależności (2.26) oraz pogrupowaniu wyrazów przy poszczególnych wersorach powyższy wzór przyjmie postać:

$$\mathbf{c}=(a_y b_z-a_z b_y)\mathbf{i}+(a_z b_x-a_x b_z)\mathbf{j}+(a_x b_y-a_y b_x)\mathbf{k}. \tag{2.27}$$

Wyrażenie po prawej stronie tego równania jest rozwinięciem wyznacznika

$$\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{2.28}$$

W celu obliczenia współrzędnych c_x, c_y, c_z iloczynu wektorowego należy wektor **c** zapisany analitycznie: $\mathbf{c} = c_x\,\mathbf{i} + c_y\,\mathbf{j} + c_z\,\mathbf{k}$ podstawić do równania (2.27). Z porównania wyrazów przy tych samych wersorach otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned} c_x &= (a_y b_z - a_z b_y), \\ c_y &= (a_z b_x - a_x b_z), \\ c_z &= (a_x b_y - a_y b_x). \end{aligned}\right\} \tag{2.29}$$

2.3.3. Iloczyny złożone trzech wektorów

W poprzednich dwóch punktach omówiliśmy iloczyn skalarny oraz iloczyn wektorowy dwóch wektorów. Wektory te mogły być w szczególności sumą kilku wektorów. Obecnie podamy określenia iloczynów podwójnych złożonych z trzech wektorów. Będzie to *iloczyn mieszany* trzech wektorów oraz *podwójny iloczyn wektorowy* trzech wektorów. Ograniczymy się przy tym tylko do określenia tych iloczynów oraz podania podstawowych zależności niezbędnych do przekształceń wzorów wektorowych w dalszych rozdziałach. Dowody na podane niżej przekształcenia można znaleźć w literaturze [6, 9, 11].

Iloczynem mieszanym trzech wektorów **a**, **b** i **c** nazywamy iloczyn skalarny jednego z tych wektorów, np. wektora **a**, przez wektor będący iloczynem wektorowym dwóch pozostałych:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}). \tag{2.30}$$

Z podanej definicji wynika, że iloczyn mieszany jest skalarem.

W interpretacji geometrycznej iloczyn mieszany jest równy liczbowo objętości równoległościanu zbudowanego na wektorach **a**, **b** i **c**. Z podanej interpretacji geometrycznej wynika, że gdy wektory te leżą w jednej płaszczyźnie, to iloczyn mieszany jest równy zeru.

Wartość iloczynu mieszanego nie ulega zmianie, jeżeli w iloczynie tym będziemy zmieniać cyklicznie kolejność wyrazów:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}). \tag{2.31}$$

Jeżeli wektory występujące w iloczynie mieszanym przedstawimy analitycznie:

$$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k},$$
$$\mathbf{b} = b_x\,\mathbf{i} + b_y\,\mathbf{j} + b_z\,\mathbf{k},$$
$$\mathbf{c} = c_x\,\mathbf{i} + c_y\,\mathbf{j} + c_z\,\mathbf{k},$$

to iloczyn mieszany można zapisać w postaci wyznacznika utworzonego ze współrzędnych wektorów:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{2.32}$$

Podwójny iloczyn wektorowy trzech wektorów **a**, **b** i **c** jest wektorem powstałym w wyniku wektorowego pomnożenia wektora **a** przez iloczyn wektorowy wektora **b** i **c**:

$$\mathbf{a}\times\left(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\right). \tag{2.33}$$

Powyższy wzór można rozwinąć do postaci bardziej przydatnej do przekształceń wzorów wektorowych:

$$\mathbf{a}\times\left(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\right)=\mathbf{b}\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\right)-\mathbf{c}\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\right). \tag{2.34}$$