### 7.4.1. Energia kinetyczna układu punktów materialnych

*Energią kinetyczną* punktu materialnego o masie m, poruszającego się z prędkością **v**, nazywamy połowę iloczynu masy punktu i kwadratu jego prędkości:

$$E = \frac{mv^2}{2}.$$

Dla układu n punktów materialnych o masach $m_k$ poruszających się z prędkością $\mathbf{v}_k$ energia kinetyczna będzie równa sumie energii kinetycznych poszczególnych punktów materialnych:

$$E = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k v_k^2 . \tag{7.75}$$

Podobnie jak w przypadku krętu układu punktów materialnych (7.3.2), prędkość bezwzględną $\mathbf{v}_k$ każdego punktu materialnego rozłożymy na prędkość unoszenia $\mathbf{v}_C$, wywołaną ruchem postępowym ruchomego układu współrzędnych $x', y', z'$ o początku w środku masy C względem układu nieruchomego x, y, z, i prędkość względną $\mathbf{v}_{Ck}$ względem układu ruchomego (rys. 7.17):

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{Ck} .$$

Po podstawieniu tej zależności do wzoru (7.75) oraz przedstawieniu kwadratu prędkości w postaci iloczynu skalarnego

$$v_k^2 = \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k$$

otrzymamy:

$$E = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k\, \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \left(\mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{Ck}\right)\cdot\left(\mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{Ck}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \left(v_C^2 + 2\,\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{v}_{Ck} + v_{Ck}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2} v_C^2 \sum_{k=1}^{n} m_k + \mathbf{v}_C \cdot \sum_{k=1}^{n} m_k\, \mathbf{v}_{Ck} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k v_{Ck}^2 . \tag{a}$$

Drugi wyraz po prawej stronie powyższego równania jest równy zeru, ponieważ występująca w nim suma jest pędem układu punktów materialnych w jego ruchu względem ruchomego układu współrzędnych $x', y', z'$. Wiadomo jednakże, że pęd jest równy iloczynowi masy całkowitej i prędkości środka masy (7.44), która w stosunku do ruchomego układu odniesienia $x', y', z'$ jest równa zeru. Zatem

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \, \mathbf{v}_{Ck} = 0 .$$

Ostatni wyraz jest energią kinetyczną układu punktów materialnych w jego ruchu względem ruchomego układu odniesienia $x', \ y', \ z'$ :

$$E_c = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k v_{Ck}^2 . \tag{7.76}$$

Po oznaczeniu masy całkowitej rozpatrywanego układu materialnego przez

$$m = \sum_{k=1}^{n} m_k$$

równanie (a) przyjmuje postać:

$$E = E_C + \frac{1}{2} m v_C^2 . \tag{7.77}$$

Zależność (7.77) nosi nazwę *twierdzenia Koeniga*.

*Energia kinetyczna układu punktów materialnych jest równa energii tegoż układu w jego ruchu względem środka masy oraz energii kinetycznej masy całkowitej poruszającej się z prędkością środka masy.*

### 7.4.2. Energia kinetyczna bryły

W celu wyznaczenia energii kinetycznej bryły o masie m poruszającej się ruchem ogólnym postąpimy podobnie jak przy wyznaczaniu krętu bryły (p. 7.3.3). W bryle myślowo wydzielimy element masy dm (rys. 7.18) poruszający się z prędkością zgodną ze wzorem (5.32):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' . \tag{b}$$

Energia kinetyczna tego elementu

$$dE = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\, dm ,$$

a energia bryły jest równa całce względem całej masy z tego wyrażenia:

$$E = \frac{1}{2} \int_m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\, dm . \tag{c}$$

Po podstawieniu do wzoru (c) prędkości w postaci (b) otrzymamy:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int_m (\mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') dm = \\ &= \frac{1}{2} \int_m v_C^2 dm + \int_m \mathbf{v}_C \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') dm + \frac{1}{2} \int_m (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') dm . \end{aligned} \tag{d}$$

Po przekształceniu wyrażeń podcałkowych w drugiej i trzeciej całce do postaci:

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}_C \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = (\mathbf{v}_C \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{r}', \\ &(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = \boldsymbol{\omega} \cdot [\mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')] \end{aligned}$$

oraz wyłączeniu przed całki $\mathbf{v}_C$ i $\boldsymbol{\omega}$, jako wielkości niezależnych od zmiennych całkowania $x'$, $y'$, $z'$, wzór (d) możemy zapisać:

$$E = \frac{1}{2} v_C^2 \int_m dm + (\mathbf{v}_C \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \int_m \mathbf{r}' dm + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \int_m \mathbf{r}' \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') dm . \tag{e}$$

Pierwsza całka jest masą bryły, druga momentem statycznym względem środka masy, a trzecia krętem bryły w ruchu względem środka masy (7.62), czyli

$$m = \int_m dm, \quad \int_m \mathbf{r}' dm = 0 \text{ oraz } \mathbf{k}_C = \int_m \mathbf{r}' \times (\omega \times \mathbf{r}') dm .$$

Po uwzględnieniu powyższych zależności we wzorze (e) otrzymujemy:

$$E = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{k}_C + \frac{1}{2}mv_C^2 . \tag{7.78}$$

Pierwszy wyraz w powyższym wzorze jest energią kinetyczną bryły w jej chwilowym ruchu obrotowym względem środka masy:

$$E_C = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{k}_C . \tag{7.79}$$

Zatem energię kinetyczną bryły możemy przedstawić w postaci identycznej ze wzorem (7.77):

$$E = E_C + \frac{1}{2}mv_C^2 . \tag{7.80}$$

Jest to *twierdzenie Koeniga* dla bryły.

*Energia kinetyczna bryły w ruchu ogólnym jest sumą energii kinetycznej bryły w jej chwilowym ruchu obrotowym względem środka masy i energii kinetycznej masy całkowitej poruszającej się z prędkością środka masy.*

Aby obliczyć energię $E_C$ we wzorze (7.79), przedstawimy iloczyn skalarny za pomocą współrzędnych wektorów $\boldsymbol{\omega}$ i $\mathbf{k}_C$ danych w układzie ruchomym $x', y', z'$:

$$E_C = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{k}_C = \frac{1}{2}\left(\omega_{x'}k_{Cx'} + \omega_{y'}k_{Cy'} + \omega_{z'}k_{Cz'}\right).$$

Po podstawieniu w tym wzorze współrzędnych krętu danych wzorami (7.65) i uporządkowaniu wyrazów energię kinetyczną bryły w jej ruchu względem środka masy możemy przedstawić w postaci:

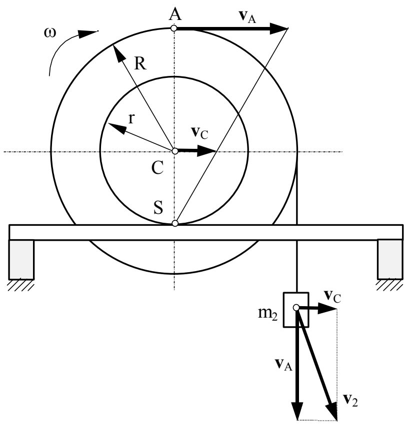
$$\begin{aligned} E_C = \frac{1}{2}\left(I_{x'}\omega_{x'}^2 + I_{y'}\omega_{y'}^2 + I_{z'}\omega_{z'}^2\right) - \\ -\left(D_{x'y'}\omega_{x'}\omega_{y'} + D_{y'z'}\omega_{y'}\omega_{z'} + D_{z'x'}\omega_{z'}\omega_{x'}\right) \end{aligned} \tag{7.81}$$

Zatem, podobnie jak w przypadku krętu $\mathbf{k}_C$, do obliczenia energii kinetycznej bryły w jej ruchu względem środka masy musimy znać wszystkie osiowe i dewiacyjne momenty bezwładności.

Gdy osie $x', y', z'$ są głównymi centralnymi osiami bezwładności, momenty dewiacyjne znikają, a wzór (7.81) upraszcza się do postaci:

$$E_C = \frac{1}{2}\left(I_{x'}\omega_{x'}^2 + I_{y'}\omega_{y'}^2 + I_{z'}\omega_{z'}^2\right). \tag{7.82}$$

Jeżeli ruch bryły jest ruchem obrotowym wokół stałej osi obrotu, np. l, z prędkością kątową **ω**, to energia ruchu obrotowego



Rys. 7.21. Wyznaczenie energii kinetycznej kołowrotu

$$E = \frac{1}{2} I_l \omega^2, \tag{7.83}$$

gdzie $I_l$ jest momentem bezwładności względem osi obrotu l.

**Przykład 7.11.** Kołowrót o masie $m_1 = 5m$ i promieniach r oraz $R = 1{,}5r$ toczy się bez poślizgu małym obwodem po poziomej listwie (rys. 7.17). Środek masy C tego kołowrotu znajduje się na osi symetrii obrotowej i ma stałą prędkość $\mathbf{v}_C$. Na duży obwód nawinięto linkę, na której końcu zawieszono ciężarek o masie $m_2 = m$. Promień bezwładności kołowrotu względem osi symetrii prostopadłej do płaszczyzny rysunku jest równy $i_C$. Obliczyć energię kinetyczną tego układu.

*Rozwiązanie*. Energia kinetyczna układu jest równa sumie energii kinetycznej kołowrotu $E_1$ poruszającego się ruchem płaskim i energii kinetycznej ciężarka $E_2$ poruszającego się ruchem postępowym:

$$E = E_1 + E_2.$$

Wzór na energię kinetyczną kołowrotu, zgodnie z równaniem (7.80) wynikającym z twierdzenia Koeniga, po uwzględnieniu zależności (7.83) ma postać:

$$E_1 = \frac{1}{2} I_C \omega^2 + \frac{1}{2} m_1 v_C, \tag{a}$$

gdzie moment bezwładności kołowrotu względem osi symetrii obrotowej

$$I_C = m_1 i_C^2 = 5 m i_C^2. \tag{b}$$

Energia kinetyczna ciężarka

$$E_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m v_2^2. \tag{c}$$

Ponieważ kołowrót toczy się bez poślizgu, chwilowy środek obrotu znajduje się w punkcie S styku kołowrotu z listwą. Korzystając z własności chwilowego środka obrotu, możemy napisać:

$$\omega = \frac{v_C}{r}, v_A = \omega(R + r) = \frac{R + r}{r} v_C = \frac{5}{2} v_C . \tag{d}$$

Zgodnie z rysunkiem prędkość ciężarka $\mathbf{v}_2$ jest równa sumie geometrycznej prędkości $\mathbf{v}_C$ i $\mathbf{v}_A$. Stąd kwadrat prędkości $\mathbf{v}_2$

$$v_2^2 = v_A^2 + v_C^2 = \frac{29}{4} v_C^2 . \tag{e}$$

Po dodaniu wzoru (c) do (a) i uwzględnieniu zależności (b), (d) i (e) otrzymujemy całkowitą energię kinetyczną układu:

$$E = \frac{5}{2} m i_C^2 \left( \frac{v_C}{r} \right)^2 + \frac{5}{2} m v_C^2 + \frac{29}{8} m v^2 = \left[ \frac{5}{2} \left( \frac{i_C}{r} \right)^2 + \frac{49}{8} \right] m v_C^2 .$$

### 7.4.3. Zasada pracy i energii kinetycznej

Dla każdego z n punktów materialnych układu omówionego w p. 7.2.2 i przedstawionego na rys. 7.12 napiszemy, tak jak poprzednio, dynamiczne równanie ruchu (7.47):

$$m_k \frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2} = \mathbf{P}_k + \mathbf{P}_{wk}$$

albo

$$m_k \frac{d\,\mathbf{v}_k}{dt} = \mathbf{P}_k + \mathbf{P}_{wk} \qquad (k = 1,2,\ldots,n).$$

Pomnóżmy skalarnie każde z tych równań przez prędkość $\mathbf{v}_k$ i dodajmy je stronami:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\,\mathbf{v}_k}{dt} \cdot \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{P}_k + \mathbf{P}_{wk}) \cdot \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_k \cdot \mathbf{v}_k + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_{wk} \cdot \mathbf{v}_k \,. \tag{e}$$

Zgodnie z definicją podaną w p. 7.1.7 pierwsza suma w równaniu (e) jest mocą układu sił zewnętrznych:

$$N_z = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_k \cdot \mathbf{v}_k \,, \tag{7.84}$$

a druga podwójna suma mocą wszystkich sił wewnętrznych:

$$N_w = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_{wk} \cdot \mathbf{v}_k \,. \tag{7.85}$$

Wykażemy, że lewa strona równania (e) jest pochodną względem czasu energii całkowitej układu punktów materialnych:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\,\mathbf{v}_k}{dt} \cdot \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left( m_k \frac{d\,\mathbf{v}_k}{dt} \cdot \mathbf{v}_k + m_k\, \mathbf{v}_k \cdot \frac{d\,\mathbf{v}_k}{dt} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{d(m_k\, \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k)}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} m_k\, \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k = \frac{dE}{dt}.$$

Ostatecznie równanie (e) przyjmuje postać:

$$\frac{dE}{dt} = N_z + N_w \,. \tag{7.86}$$

Zatem pochodna względem czasu energii kinetycznej układu materialnego jest równa sumie mocy wszystkich sił zewnętrznych i wewnętrznych. Po scałkowaniu obustronnie równania (7.86) od 0 do t otrzymamy:

$$E(t) - E(0) = \int_0^t N_z dt + \int_0^t N_w dt\,. \tag{f}$$

Całki występujące w powyższym równaniu, zgodnie ze wzorem (7.36), przedstawiają odpowiednio pracę sił zewnętrznych i wewnętrznych:

$$L_z = \int_0^t N_z dt, \qquad L_w = \int_0^t N_w dt\,. \tag{g}$$

Po wprowadzeniu oznaczeń (g) do równania (f) otrzymujemy *zasadę pracy i energii kinetycznej* dla układu punktów materialnych:

$$E(t) - E(0) = L_z + L_w$$

lub po wprowadzeniu oznaczeń E(t) = $E_2$, E(0) = $E_1$

$$E_2 - E_1 = L_z + L_w\,. \tag{7.87}$$

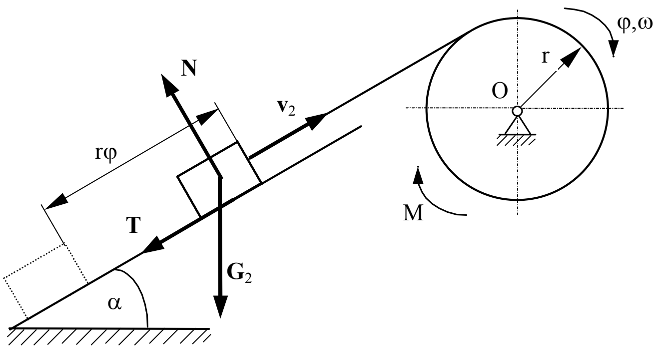
*Przyrost energii kinetycznej układu punktów materialnych w skończonym przedziale czasu jest równy pracy wykonanej w tym samym czasie przez wszystkie siły zewnętrzne i wewnętrzne.*

Bez przeprowadzania dowodu metodą analityczną można zauważyć, że praca sił wewnętrznych jest ściśle związana ze zmianą odległości między punktami układu materialnego. Gdy odległości między punktami układu materialnego nie ulegają zmianie, praca sił wewnętrznych będzie równa zeru. Zatem dla bryły sztywnej lub ciała sztywnego praca sił wewnętrznych jest równa zeru, $L_w$ = 0. W tej sytuacji zasadę pracy i energii kinetycznej dla bryły sztywnej można zapisać w postaci:

$$E_2 - E_1 = L_z\,. \tag{7.88}$$

*Przyrost energii kinetycznej bryły sztywnej w skończonym przedziale czasu jest równy pracy wykonanej w tym samym czasie przez wszystkie siły zewnętrzne działające na tę bryłę.*

**Przykład 7.12.** Do bębna kołowrotu o promieniu r i masie $m_1$ jest przyłożony stały moment obrotowy M. Do końca wiotkiej liny nawiniętej na bęben przymocowano ciężar o masie $m_2$, który przesuwa się po równi pochyłej o kącie nachylenia ♀$\alpha$(rys. 7.22). Współczynnik tarcia między masą $m_2$ a równią wynosi $\mu$. Jaką prędkość kątową $\omega$ osiągnie bęben po obróceniu się o $\varphi$ radianów, jeżeli w chwili początkowej układ był w spoczynku? Masę liny pominąć, a bęben uważać za jednorodny walec.




Rys. 7.22. Wyznaczenie prędkości kątowej bębna

*Rozwiązanie*. Do rozwiązania zadania zastosujemy zasadę pracy i energii kinetycznej (7.88):

$$E_2 - E_1 = L\,.$$

Z uwagi na to, że układ w chwili początkowej znajdował się w spoczynku, jego energia kinetyczna była równa zeru, $E_1 = 0$. Otrzymujemy więc:

$$E_2 = L\,. \tag{a}$$

Energia kinetyczna układu składa się z energii kinetycznej ruchu postępowego masy $m_2$ oraz ruchu obrotowego bębna:

$$E_2 = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}I_O\omega^2\,.$$

Ponieważ moment bezwładności bębna $I_O$ względem osi obrotu i prędkość $v_2$ są równe:

$$I_O = \frac{1}{2}m_1 r^2, \quad v_2 = \omega r\,,$$

mamy:

$$E_2 = \frac{1}{2}m_2\omega^2 r^2 + \frac{1}{4}m_1 r^2\omega^2 = \frac{1}{4}(m_1 + 2m_2)r^2\omega^2\,. \tag{b}$$

Pracę L wykonują: moment obrotowy M, składowa siły ciężkości $\mathbf{G}_2$ równoległa do równi oraz siła tarcia $\mathbf{T}$. Jeżeli zauważymy, że przy obrocie bębna o kąt φ ciężar o masie $m_2$ przesunie się w górę równi o rφ, możemy napisać:

$$L = M\varphi - \left(m_2 g \sin\alpha + T\right) r\varphi \,.$$

Po podstawieniu do tego wzoru $T = \mu N = \mu m_2 g \cos\alpha$ wykonana praca

$$L = \left[\frac{M}{r} - m_2 g\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)\right] r\varphi \,. \qquad \text{(c)}$$

Po podstawieniu zależności (b) i (c) do wzoru (a) otrzymujemy równanie:

$$\frac{1}{4}\left(m_1 + 2m_2\right) r^2 \omega^2 = \left[\frac{M}{r} - m_2 g\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)\right] r\varphi \,,$$

skąd

$$\omega = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{M - m_2 g r\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)}{m_1 + 2m_2}\varphi} \,.$$

### 7.4.4. Zasada zachowania energii

Obecnie rozpatrzymy ruch układu materialnego, na który działają siły potencjalne, zarówno zewnętrzne jak i wewnętrzne. W punkcie 7.1.5 udowodniono, że jeżeli na punkt materialny działa siła potencjalna, to praca wykonana przez tę siłę jest równa ubytkowi energii potencjalnej. Przyjmiemy bez dowodu, że zależność ta jest słuszna nie tylko dla każdego punktu, ale i dla całego układu materialnego. Zatem pracę sił zewnętrznych i wewnętrznych możemy zapisać w postaci:

$$\left.\begin{aligned} L_z &= U_{z1} - U_{z2}, \\ L_w &= U_{w1} - U_{w2}, \end{aligned}\right\} \tag{h}$$

gdzie $U_{z1}$ i $U_{z2}$ oznaczają energię potencjalną sił zewnętrznych w położeniu początkowym i końcowym, a $U_{w1}$ i $U_{w2}$ energię potencjalną sił wewnętrznych w położeniu początkowym i końcowym. Po podstawieniu wzorów (h) do równania zasady pracy i energii kinetycznej (7.87) otrzymamy:

$$E_2 - E_1 = U_{z1} - U_{z2} + U_{w1} - U_{w2}$$

lub

$$E_2 + U_{z2} + U_{w2} = E_1 + U_{z1} + U_{w1}. \tag{i}$$

Z równania (i) wynika, że suma energii kinetycznej i energii potencjalnej sił zewnętrznych i wewnętrznych jest w każdym położeniu układu wielkością stałą. Po wprowadzeniu do równania (i) oznaczeń:

$$U_2 = U_{z2} + U_{w2} \ \text{ i } \ U_1 = U_{z1} + U_{w1}$$

otrzymamy:

$$E_2 + U_2 = E_1 + U_1$$

albo ogólnie

$$E + U = \text{const.} \tag{7.89}$$

Jest to *zasada zachowania energii mechanicznej*.

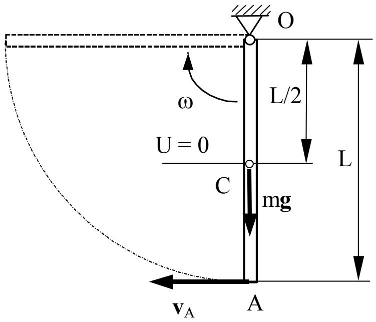
*Gdy na układ materialny działają siły potencjalne, wtedy suma energii kinetycznej i potencjalnej tego układu jest wielkością stałą.*

Zasada zachowania energii mechanicznej jest słuszna również w przypadku, gdy działające siły można rozłożyć na siły potencjalne i siły, które nie są potencjalne, ale nie wykonują pracy, np. reakcje gładkich powierzchni.

Układy materialne, do których odnosi się zasada zachowania energii mechanicznej, nazywamy układami zachowawczymi, a siły siłami zachowawczymi. Układy, których nie dotyczy ta zasada, nazywamy układami rozpraszającymi lub dyssy-patywnymi, np. układy z tarciem.

Zasada zachowania energii mechanicznej jest trzecią *zasadą zachowania* w dynamice, po zasadzie zachowania pędu i zasadzie zachowania krętu. Należy pamiętać, że zasady zachowania są słuszne tylko wówczas, gdy są spełnione odpowiednie założenia poczynione przy ich wyprowadzaniu.

**Przykład 7.13.** Cienki jednorodny pręt OA o długości L i masie m może się obracać bez tarcia wokół osi poziomej prostopadłej do osi pręta przechodzącej przez jego koniec O (rys. 7.23). Jaką prędkość należy nadać końcowi A w chwili, gdy pręt jest w spoczynku w położeniu równowagi stałej, aby wykonał on ćwierć obrotu?



Rys. 7.23. Wyznaczenie prędkości początkowej końca pręta

*Rozwiązanie*. Na pręt działa siła ciężkości, która jest siłą potencjalną. Zatem do rozwiązania zadania możemy zastosować zasadę zachowania energii mechanicznej (7.89):

$$E_1 + U_1 = E_2 + U_2. \qquad \text{(a)}$$

Jeżeli poziom zerowej energii potencjalnej przyjmiemy na wysokości środka ciężkości C, jak na rysunku, to $U_1 = 0$. Po wykonaniu ćwierć obrotu pręt zajmie położenie poziome i zatrzyma się. Jego energia kinetyczna będzie równa zeru, $E_2 = 0$. Równanie (a) będzie miało więc postać:

$$E_1 = U_2. \qquad \text{(b)}$$

W chwili początkowej energia kinetyczna

$$E_1 = \frac{1}{2} I_O \omega^2 .$$

Moment bezwładności pręta jednorodnego względem jego końca (patrz przykład 6.2)

$$I_O = \frac{mL^2}{3} .$$

Z kolei prędkość kątowa pręta

$$\omega = \frac{v_A}{L} .$$

Energia kinetyczna pręta ma więc postać:

$$E_1 = \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\left(\frac{v_A}{L}\right)^2 = \frac{mv_A^2}{6}\,. \tag{c}$$

Energia potencjalna pręta w położeniu końcowym

$$U_2 = mg\frac{L}{2}\,. \tag{d}$$

Po podstawieniu wzorów (c) i (d) do równości (b) otrzymujemy równanie:

$$\frac{mv_A^2}{6} = \frac{mgL}{2}\,.$$

Stąd prędkość początkowa końca A pręta

$$v_A = \sqrt{3gL}\,.$$

Czytelnikowi pozostawiamy wyznaczenie prędkości, jaką należy nadać końcowi A pręta, aby wykonał on pełen obrót.