2.1. Określenie i rodzaje wektorów. Mnożenie wektora przez skalar

Wielkości fizyczne występujące w mechanice i innych działach fizyki można podzielić na *skalary* i *wektory*. Aby określić wielkość skalarną, wystarczy podać tylko jedną liczbę. Wielkościami takimi są masa, czas, temperatura, objętość i inne. Do określenia wielkości wektorowej nie wystarcza podanie jednej liczby. Przykładem takiej wielkości jest siła. Aby ją określić, należy podać wartość, kierunek
w przestrzeni oraz zwrot. W ogólnym przypadku aby określić wektor, należy znać:

a) wartość bezwzględną wektora, zwaną modułem,
b) kierunek, czyli prostą, na której leży wektor (linię działania),
c) zwrot,
d) punkt przyłożenia.

Nie wszystkie wielkości wektorowe wymagają dla swego określenia podania wszystkich wymienionych cech. Z tego punktu widzenia rozróżniamy: *wektory zaczepione*, *wektory przesuwne* lub *ślizgające się* oraz *wektory swobodne*.

Wektory zaczepione wymagają do ich określenia podania wszystkich czterech cech. Wektorów takich nie można przemieszczać ani przesuwać.

Wektory przesuwne są określone za pomocą modułu, zwrotu oraz linii działania. Takie wektory mogą być jedynie przesuwane wzdłuż prostych, na których leżą.

Wektory swobodne są określone przez moduł, zwrot oraz kierunek równoległy do ich linii działania. Oznacza to, że wektor swobodny można dowolnie przemieszczać, równolegle do kierunku jego działania.

Graficznie wektory przedstawia się za pomocą odcinka skierowanego jak na rys. 2.1. Długość odcinka określa moduł wektora, kierunek – kierunek wektora (linię działania), a strzałka – zwrot wektora. Wektory będziemy oznaczać pogrubionymi literami – jedną literą albo dwoma, oznaczającymi początek i koniec wektora:

$$\mathbf{a} = \mathbf{AB}.$$

Moduł wektora będziemy oznaczać tak jak skalary albo za pomocą symbolu wartości bezwzględnej:

$$\mathrm{a} = |\mathbf{a}| = \mathrm{AB} = |\mathbf{AB}|.$$

Moduł jest na ogół wielkością mianowaną i jego wartość liczbowa zależy od przyjętych jednostek fizycznych.

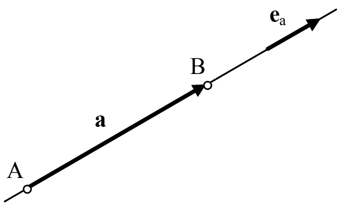
Dwa wektory swobodne przedstawiające tę samą wielkość wektorową są
równe, jeżeli mają równe moduły, kierunki i zwroty. Aby dwa wektory przesuwne były

równe, muszą ponadto leżeć na jednej prostej, a wektory zaczepione muszą być przyłożone w jednym punkcie. Równość wektorów **a** i **b** zapisujemy tak jak równość liczb, czyli

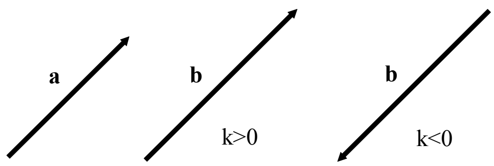
$$\mathbf{a} = \mathbf{b}.$$

W wyniku pomnożenia wektora **a** przez skalar k otrzymamy nowy wektor **b** równoległy do wektora **a** o module k razy większym od modułu wektora **a**. Zwrot wektora **b** będzie zależał od znaku skalara k. Jeżeli k > 0, to zwrot wektora **b** jest zgodny ze zwrotem wektora **a**, a przeciwny, gdy k < 0 (rys. 2.2). Wektor **b** będziemy zapisywać:

$$\mathbf{b} = k\,\mathbf{a}. \tag{2.1}$$

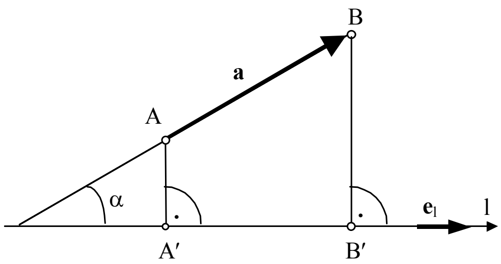


Rys. 2.1. Graficzne przedstawienie wektora



Rys. 2.2. Wektory równoległe

Rzutem wektora $\mathbf{a}$ = $\mathbf{AB}$ na dowolną oś l nazywamy odcinek $A'B'$, którego początek i koniec są rzutami początku i końca wektora **a** na oś l (rys. 2.3).



Rys. 2.3. Rzut wektora na oś

Z rysunku 2.3 wynika, że rzut wektora **a** na oś l jest równy iloczynowi modułu wektora pomnożonemu przez kosinus kąta zawartego między kierunkiem wektora a osią.

$$A'B' = Rz_l(\mathbf{a}) = a\cos\alpha. \tag{2.2}$$

Łatwo spostrzec, że jeżeli zwrot wektora i zwrot osi są zgodne oraz kąt α jest ostry, to znak rzutu jest dodatni.

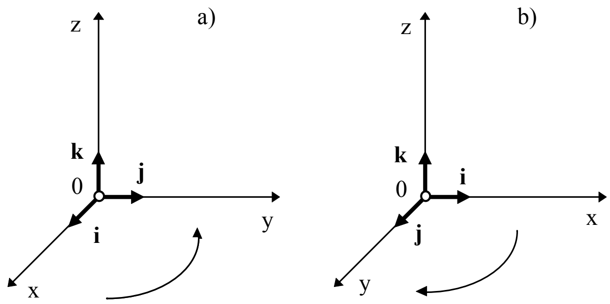
Często do określenia kierunku w przestrzeni używamy tzw. wektora jednostkowego, którego moduł jest równy jedności i jest liczbą bezwymiarową. Mając dowolny wektor, można utworzyć wektor jednostkowy o kierunku tego wektora przez podzielenie wektora przez jego moduł. Wektor jednostkowy będziemy oznaczać literą **e** z indeksem dolnym oznaczającym kierunek. Wektor jednostkowy o kierunku i zwrocie wektora **a**, pokazany na rys. 2.1, otrzymamy ze wzoru:

$$\mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}}{a}. \tag{2.3}$$

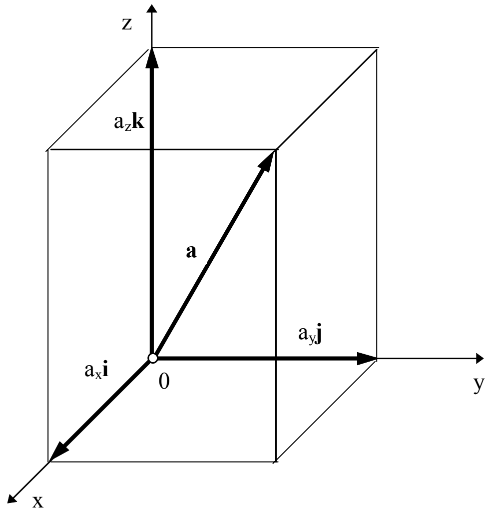
Po przekształceniu powyższego wzoru widzimy, że każdy wektor można zapisać w postaci iloczynu jego modułu i wektora jednostkowego:

$$\mathbf{a} = a\,\mathbf{e}_a. \tag{2.4}$$

W celu analitycznego przedstawiania wektorów należy wprowadzić odpowiedni układ współrzędnych. Najczęściej przyjmujemy kartezjański prostokątny układ współrzędnych o osiach x, y, z i wektorach jednostkowych **i**, **j**, **k** o kierunkach osi współrzędnych zwanych *wersorami*. W dalszym ciągu będziemy wyłącznie stosować prawoskrętne układy współrzędnych charakteryzujące się tym, że jeżeli obrócimy oś x w kierunku osi y, to oś z jest skierowana zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej (rys. 2.4a). Na rysunku 2.4b przedstawiono układ lewoskrętny.



Rys. 2.4. Prostokątne układy współrzędnych: a) prawoskrętny, b) lewoskrętny



Rys. 2.5. Składowe wektora w kartezjańskim układzie współrzędnych

W układzie współrzędnych prostokątnych o osiach x, y, z i wersorach odpowiednio **i**, **j**, **k** dowolny wektor **a** można rozłożyć na trzy składowe: $a_x\mathbf{i}$, $a_y\mathbf{j}$, $a_z\mathbf{k}$ o kierunkach osi układu współrzędnych (rys. 2.5). Wektor **a** możemy zapisać analitycznie w postaci sumy trzech wektorów składowych (por. p. 2.2):

$$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}. \tag{2.5}$$

W powyższym wzorze a_x, a_y, a_z są współrzędnymi wektora równymi

rzutom wektora **a** na osie układu współrzędnych x, y, z. Jeżeli wektor **a** tworzy z osiami x, y, z odpowiednio kąty α, β, γ, to jego współrzędne (rzuty) zgodnie ze wzorem (2.2) wyrazimy następująco:

$$a_x = a\cos\alpha, \quad a_y = a\cos\beta, \quad a_z = a\cos\gamma. \tag{2.6}$$

Gdy znane są współrzędne wektora, to jego moduł określa wzór:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \tag{2.7}$$

a kosinusy kątów, zwane *kosinusami kierunkowymi*, wyznaczonymi przez kierunki, jakie wektor **a** tworzy z osiami x, y, z, wyrażają zależności:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a}, \; \cos\beta = \frac{a_y}{a}, \; \cos\gamma = \frac{a_z}{a}. \tag{2.8}$$