

4.1. Środek ciężkości i środek masy

Rozpatrzmy układ n punktów materialnych o masach m_k ($k = 1, 2, \dots, n$), na które działają siły ciężkości \mathbf{G}_k (rys. 4.1). Niech położenie tych punktów względem punktu odniesienia O określają wektory wodzące \mathbf{r}_k , jak na rysunku. Wiadomo, że siły ciężkości poszczególnych punktów są równe iloczynowi masy przez przyspieszenie ziemskie, $\mathbf{G}_k = m_k \mathbf{g}$, i są skierowane do środka kuli ziemskiej. Ponieważ wymiary układów materialnych rozpatrywanych w zastosowaniach technicznych są pomijalnie małe w porównaniu z promieniem kuli ziemskiej, siły ciężkości możemy uważać za siły równoległe. Punkt C położenia wypadkowej sił ciężkości \mathbf{G} nazywamy *środkiem ciężkości* układu lub ciała materialnego. Punkt ten nie zależy od obrotu układu lub ciała materialnego.

Skoro siły ciężkości są siłami równoległymi, to do określenia położenia środka ciężkości C możemy wykorzystać wzory wyprowadzone w p. 3.9.1 na środek układu sił równoległych. Wektor wodzący \mathbf{r}_C środka ciężkości C układu punktów materialnych zgodnie ze wzorem (3.54) będzie wyrażał związek:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k G_k}{G}. \quad (4.1)$$

Współrzędne środka ciężkości C w prostokątnym układzie współrzędnych otrzymamy ze wzorów (3.55):

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n x_k G_k}{G}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n y_k G_k}{G}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n z_k G_k}{G}. \quad (4.2)$$

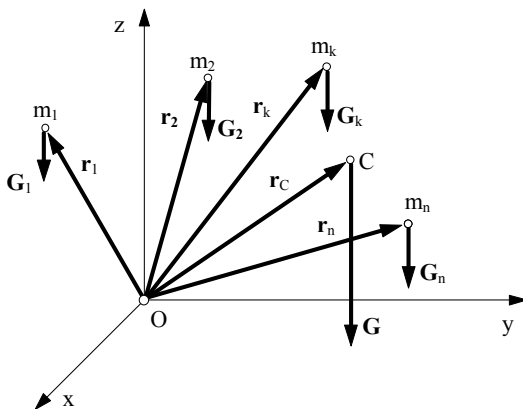
We wzorach (4.1) i (4.2) G jest ciężarem całkowitym układu materialnego:

$$G = \sum_{k=1}^n G_k.$$

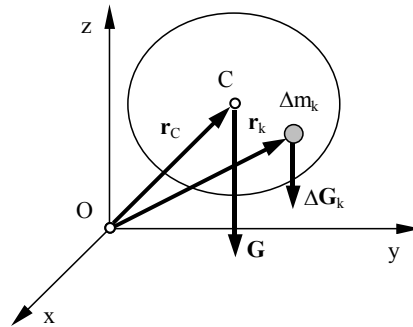
W przypadku ciała materialnego o ciągłym rozmieszczeniu masy, jakim jest bryła, dzielimy je myślowo na n małych elementów o masach Δm_k i ciężarach ΔG_k (rys. 4.2). Po podstawieniu do wzorów (4.1) i (4.2) ΔG_k zamiast G_k otrzymamy wzory na przybliżone położenie środka ciężkości bryły:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \Delta G_k}{G}, \quad (4.3)$$

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \Delta G_k}{G}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n y_k \Delta G_k}{G}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n z_k \Delta G_k}{G}. \quad (4.4)$$



Rys. 4.1. Siły ciężkości jako siły równoległe



Rys. 4.2. Wyznaczanie środka ciężkości dowolnej bryły

Dokładny wzór na promień wodzący \mathbf{r}_C środka ciężkości C otrzymamy, biorąc granicę sumy występującej we wzorze (4.3) przy liczbie elementów n dążącej do nieskończoności i ich wymiarach dążących do zera. Wtedy w miejsce sumy otrzymamy całkę rozciągniętą na całą bryłę. Zatem wektor wodzący środka ciężkości C

$$\mathbf{r}_C = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \Delta G_k}{G} = \frac{\int \mathbf{r} dG}{G}. \quad (4.5)$$

Z kolei współrzędne prostokątne środka ciężkości bryły są określone wzorami:

$$x_C = \frac{\int x dG}{G}, \quad y_C = \frac{\int y dG}{G}, \quad z_C = \frac{\int z dG}{G}. \quad (4.6)$$

Założmy obecnie, że pole sił ciężkości jest polem jednorodnym, czyli przyspieszenie ziemskie nie ulega zmianie, tzn. $g = \text{const}$ w całym rozpatrywanym układzie materialnym. Możemy wtedy zapisać:

$$G = g m \quad \text{i} \quad dG = g dm,$$

gdzie m jest masą całego układu lub ciała materialnego. Po podstawieniu tych zależności do wzorów (4.5) i (4.6) i po skróceniu przez g otrzymamy wzory:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\int \mathbf{r} dm}{m}, \quad (4.7)$$

$$x_C = \frac{\int x dm}{m}, \quad y_C = \frac{\int y dm}{m}, \quad z_C = \frac{\int z dm}{m}. \quad (4.8)$$

Określają one położenie środka masy bryły. W przypadku układu punktów materialnych środek masy będzie określony przez analogiczne wzory, z tym że miejsce całek zajmą sumy:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k m_k}{m}, \quad (4.9)$$

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n x_k m_k}{m}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n y_k m_k}{m}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n z_k m_k}{m}. \quad (4.10)$$

Ze wzorów (4.7–4.10) wynika, że przy przyjętych założeniach w jednorodnym polu sił ciężkości środek masy pokrywa się ze środkiem ciężkości. Z tego względu mówiąc o środku ciężkości, możemy mieć na myśli środek masy i odwrotnie. Trzeba jednak pamiętać, przy jakich założeniach te dwa punkty się pokrywają.

4.2.1. Środek ciężkości bryły jednorodnej

Bryłą jednorodną nazywamy ciało materialne, w którym masa jest rozmieszczona równomiernie w całej jego objętości. Dla takich ciał zarówno gęstość, jak i ciężar właściwy są wielkościami stałymi. Jeżeli ciężar właściwy oznaczymy przez γ , a objętość bryły przez V , to całkowity ciężar oraz ciężar elementu objętości bryły możemy wyrazić wzorami:

$$G = \gamma V, \quad dG = \gamma dV.$$

Po podstawieniu tych zależności do wzorów (4.5) oraz (4.6) i skróceniu przez stały czynnik γ otrzymamy:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\int \mathbf{r} dV}{V}, \quad (4.11)$$

$$x_C = \frac{\int x dV}{V}, \quad y_C = \frac{\int y dV}{V}, \quad z_C = \frac{\int z dV}{V}. \quad (4.12)$$

Obszarem całkowania jest tutaj cała objętość bryły V .

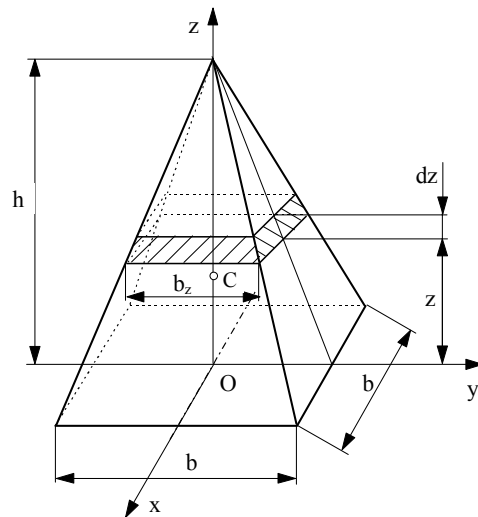
Z otrzymanych wzorów wynika, że położenie środka ciężkości (środka masy) brył jednorodnych zależy tylko od ich kształtu geometrycznego.

W wyznaczaniu środków ciężkości pomocne jest następujące twierdzenie, którego dowód pozostawiamy Czytelnikowi.

Jeżeli bryła jednorodna ma płaszczyznę, oś lub środek symetrii, to środek ciężkości tej bryły będzie leżał na płaszczyźnie, osi lub w środku symetrii.

Przykład 4.1. Wyznaczyć położenie środka ciężkości jednorodnego ostrosłupa foremnego o podstawie kwadratu o boku b i wysokości h (rys. 4.3).

Rozwiązanie. Ponieważ oś z jest osią symetrii, środek ciężkości będzie leżał na tej osi, czyli $x_C = y_C = 0$. Wystarczy zatem wyznaczyć jedną współrzędną z_C z trzeciego wzoru (4.12).



Rys. 4.3. Wyznaczanie środka ciężkości ostrosłupa

$$z_C = \frac{\int z dV}{V}. \quad (a)$$

W mianowniku tego wzoru występuje objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{b^2 h}{3}. \quad (b)$$

W celu wyznaczenia całki występującej w liczniku wzoru (a) ostrosłup podzielimy na elementy dV w postaci cienkich płytek kwadratowych, równoległych do podstawy xy , o boku b_z i grubości dz . Objętość tak przyjętego elementu

$$dV = b_z^2 dz.$$

Bok krawędzi elementu znajdziemy z proporcji wynikającej z rysunku:

$$\frac{b_z}{b} = \frac{h-z}{h}, \quad \text{stąd} \quad b_z = \frac{b}{h}(h-z).$$

Mamy więc:

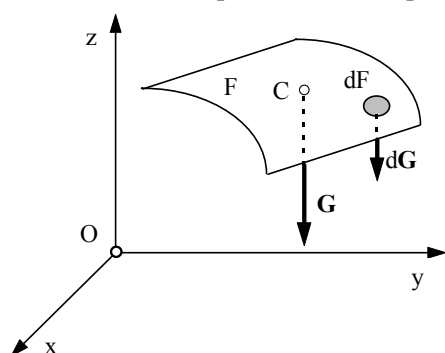
$$dV = \frac{b^2}{h^2} (h-z)^2 dz. \quad (c)$$

Po podstawieniu wzorów (c) i (b) do (a) i wykonaniu całkowania otrzymamy szukaną współrzędną środka ciężkości:

$$z_c = \frac{\frac{b^2}{h^2} \int_0^h (h-z)^2 z dz}{\frac{b^2 h}{3}} = \frac{h}{4}.$$

4.2.2. Środek ciężkości powierzchni jednorodnej

Takie bryły, jak cienkie płyty, blachy, powłoki itp., których grubość jest znikomo mała w porównaniu z pozostałymi wymiarami, będziemy nazywali



powierzchniami materialnymi. Jeżeli ciężar jednostki powierzchni jest stały, to powierzchnię taką nazywamy *powierzchnią jednorodną*. Gdy ciężar jednostki powierzchni oznaczymy przez γ_F , powierzchnię całkowitą przez F , a powierzchnię elementarną przez dF (rys. 4.4), to możemy napisać:

$$G = \gamma_F F, \quad dG = \gamma_F dF.$$

Rys. 4.4. Wyznaczanie położenia środka ciężkości powierzchni

Po podstawieniu tych zależności do wzorów (4.6) i po skróceniu licznika i mianownika przez $\gamma_F = \text{const}$ otrzymamy wzory na współrzędne środka ciężkości powierzchni jednorodnej:

$$x_C = \frac{\int x dF}{F}, \quad y_C = \frac{\int y dF}{F}, \quad z_C = \frac{\int z dF}{F}. \quad (4.13)$$

Występujące w tych wzorach całki są całkami powierzchniowymi rozciągniętymi na całą powierzchnię F .

Jeżeli powierzchnia jednorodna jest figurą płaską i leży na płaszczyźnie np. xy , to współrzędna $z_C = 0$ oraz

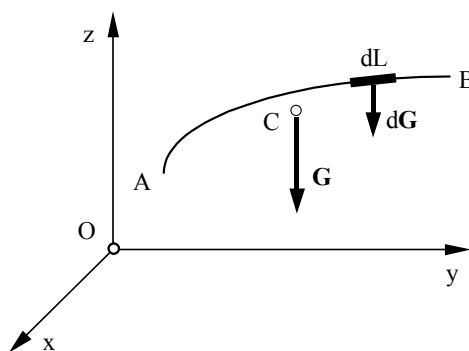
$$x_C = \frac{\int x dF}{F}, \quad y_C = \frac{\int y dF}{F}. \quad (4.14)$$

Punkt C o współrzędnych określonych wzorami (4.14) nazywamy *środkiem ciężkości figury płaskiej*.

4.2.3. Środek ciężkości linii jednorodnej

W zastosowaniach technicznych często spotykamy bryły, takie jak druty, pręty, liny itp., których dwa wymiary są znikomo małe w porównaniu z długością. Bryły te nazywamy liniami materialnymi, tzn. przyjmujemy, że cała masa jest rozłożona wzdłuż linii środków przekrojów poprzecznych. Jeżeli ciężar jednostki długości jest stały, to taką linię nazywamy *linią jednorodną*.

Po oznaczeniu ciężaru jednostki długości przez γ_L , a długości linii AB (rys. 4.5) przez L ciężar całkowity linii i ciężar elementu długości będą wyrażały wzory:



Rys. 4.5. Wyznaczanie położenia środka ciężkości linii jednorodnej

$$G = \gamma_L L, \quad dG = \gamma_L dL.$$

Postępując analogicznie jak w przypadku powierzchni jednorodnej ze wzorów (4.6), otrzymamy wzory na współrzędne środka ciężkości C linii jednorodnej:

$$x_C = \frac{\int x dL}{L}, \quad y_C = \frac{\int y dL}{L}, \quad z_C = \frac{\int z dL}{L}, \quad (4.15)$$

gdzie L jest długością linii.

4.3. Twierdzenia Pappusa-Guldina

Do wyznaczania środków ciężkości jednorodnych linii płaskich i jednorodnych figur płaskich stosuje się dwa twierdzenia Pappusa-Guldina. Podamy je bez dowodów, a ich zastosowanie zilustrujemy prostymi przykładami. Zaznajomienie się z dowodami podanych niżej twierdzeń pozostawiamy Czytelnikowi.

Pierwsze twierdzenie Pappusa-Guldina

Pole powierzchni F , powstałej przez obrót jednorodnej i płaskiej linii o długości L dookoła osi leżącej w płaszczyźnie tej linii i nie przecinającej jej, jest równe długości linii pomnożonej przez długość okręgu opisanego przy obrocie przez jej środek ciężkości:

$$F = 2\pi h_C L, \quad (4.16)$$

gdzie h_C jest odległością środka ciężkości linii od osi obrotu.

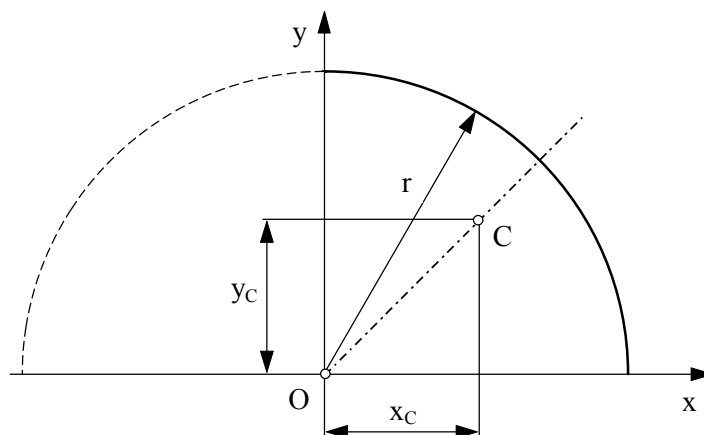
Drugie twierdzenie Pappusa-Guldina

Objętość bryły V , powstałej przy obrocie figury płaskiej o polu F dookoła osi leżącej w płaszczyźnie tej figury i nie przecinającej jej, jest równe polu powierzchni figury pomnożonemu przez długość okręgu opisanego przy obrocie przez jej środek ciężkości:

$$V = 2\pi h_C F, \quad (4.17)$$

przy czym h_C jest tutaj odległością środka ciężkości figury od osi obrotu.

Przykład 4.2. Wyznaczyć położenie środka ciężkości jednorodnego łuku ćwiartki koła przedstawionego na rys. 4.6.



Rys. 4.6. Zastosowanie pierwszego twierdzenia Pappusa-Guldina do wyznaczenia środka ciężkości łuku kołowego

Rozwiązanie. Z uwagi na to, że przedstawiony łuk ma oś symetrii, jego środek ciężkości będzie leżał na tej osi. Ponieważ oś symetrii jest dwusieczną kąta prostego zawartego między osią x i y , współrzędne x_C i y_C środka ciężkości C będą równe: $x_C = y_C$. Wystarczy zatem wyznaczyć jedną z nich. Wyznamy współrzędną x_C , korzystając z pierwszego twierdzenia Pappusa-Guldina. Przy obrocie łuku wokół osi y otrzymamy powierzchnię w postaci połowy kuli o powierzchni

$$F = 2\pi r^2.$$

Długość łuku

$$L = \frac{\pi r}{2}.$$

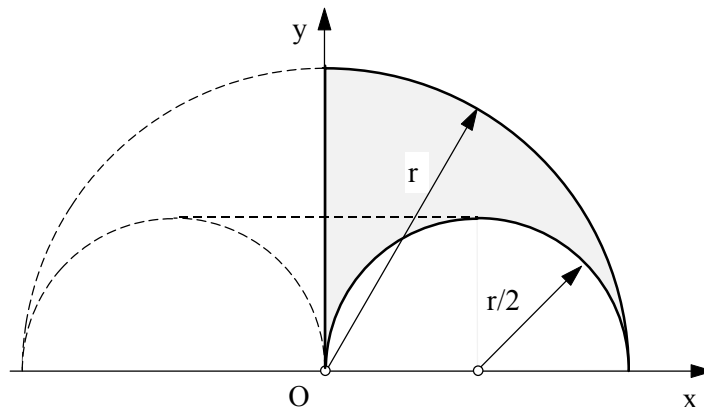
Po podstawieniu tych wartości do wzoru (4.16) otrzymamy równanie:

$$2\pi r^2 = 2\pi x_C \frac{\pi r}{2},$$

stąd

$$x_C = y_C = \frac{2r}{\pi}.$$

Przykład 4.3. Wyznaczyć położenie środka ciężkości figury płaskiej przedstawionej na rys. 4.7.



Rys. 4.7. Zastosowanie drugiego twierdzenia Pappusa-Guldina do wyznaczenia środka ciężkości figury płaskiej

Rozwiązanie. Do wyznaczenia współrzędnych x_C i y_C środka ciężkości przedstawionej na rysunku figury płaskiej zastosujemy drugie twierdzenie Pappusa--Guldina. Współrzędną y_C wyznaczymy przez obrócenie figury wokół osi x , a współrzędną x_C przez obrót wokół osi y . Przy obrocie figury wokół osi x otrzymamy bryłę o objętości równej różnicy półkuli o promieniu r i kuli o promieniu $0,5r$.

$$V = \frac{2}{3} \pi r^3 - \frac{4}{3} \pi \left(\frac{r}{2}\right)^3 = \frac{\pi r^3}{2}.$$

Pole figury

$$F = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{\pi}{2} \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{8}.$$

Po podstawieniu obliczonych wartości V i F do wzoru (4.17) otrzymamy:

$$\frac{\pi r^3}{2} = 2\pi y_C \frac{\pi r^2}{8},$$

stąd

$$y_C = \frac{2r}{\pi}.$$

Przy obrocie figury wokół osi y otrzymamy bryłę o objętości

$$V' = 2\pi x_C F. \quad (a)$$

Wielkość V' jest różnicą objętości V_1 półkuli o promieniu r i połowy torusa o objętości V_2 , powstałego z obrotu półkuli o promieniu $0,5r$ wokół osi y :

$$V' = V_1 - V_2.$$

Do obliczenia objętości V_2 połowy torusa również zastosujemy drugie twierdzenie Pappusa-Guldina. Do wzoru (4.17) zamiast h_C wstawimy $0,5r$.

$$V_2 = 2\pi \left(\frac{r}{2}\right) \frac{\pi}{2} \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2 r^3}{8}.$$

Zatem

$$V' = \frac{2\pi r^3}{3} - \frac{\pi^2 r^3}{8} = (16 - 3\pi) \frac{\pi r^3}{24}.$$

Po podstawieniu tej wartości oraz wyliczonej uprzednio powierzchni F do wzoru (a) otrzymamy równanie:

$$(16 - 3\pi) \frac{\pi r^3}{24} = 2\pi x_C \frac{\pi r^2}{8},$$

a stąd

$$x_C = (16 - 3\pi) \frac{r}{6\pi}.$$

4.4. Momenty statyczne mas

Założmy, że mamy układ n punktów materialnych o masach m_k , których położenie względem dowolnego punktu O określają promienie wodzące \mathbf{r}_k (rys. 4.1). Rozkład mas tego układu materialnego względem przyjętego punktu O charakteryzują momenty pierwszego rzędu, nazywane *momentami statycznymi*.

Momentem statycznym \mathbf{S} układu punktów materialnych względem dowolnego punktu O nazywamy sumę iloczynów mas m_k przez ich promienie wodzące \mathbf{r}_k .

$$\mathbf{S} = \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k m_k . \quad (4.18)$$

Tak zdefiniowany moment statyczny jest wektorem. Po podstawieniu do tego wzoru wektora \mathbf{r}_k zapisanego za pomocą współrzędnych prostokątnych:

$$\mathbf{r}_k = x_k \mathbf{i} + y_k \mathbf{j} + z_k \mathbf{k}$$

wektor \mathbf{S} wyrazi wzór:

$$\mathbf{S} = \sum_{k=1}^n x_k m_k \mathbf{i} + \sum_{k=1}^n y_k m_k \mathbf{j} + \sum_{k=1}^n z_k m_k \mathbf{k} . \quad (4.19)$$

Współrzędne tego wektora nazywamy *momentami statycznymi względem płaszczyzn yz , zx i xy* , które oznaczymy odpowiednio przez S_{yz} , S_{zx} i S_{xy} .

$$S_{yz} = \sum_{k=1}^n x_k m_k , \quad S_{zx} = \sum_{k=1}^n y_k m_k , \quad S_{xy} = \sum_{k=1}^n z_k m_k . \quad (4.20)$$

Momentem statycznym układu punktów materialnych względem dowolnej płaszczyzny nazywamy sumę iloczynów mas punktów przez ich odległości od tej płaszczyzny.

Aby otrzymać moment statyczny bryły względem punktu, dzielimy bryłę na n elementów o masach Δm_k (rys. 4.2). Jeżeli założymy, że liczba elementów n dąży do nieskończoności, a ich masa do zera, zamiast wzoru (4.18) otrzymamy całkę rozciągniętą na całą masę m . Moment statyczny bryły względem początku układu O wyraża wzór:

$$\mathbf{S} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \Delta m_k = \int_m \mathbf{r} dm. \quad (4.21)$$

Z kolei momenty statyczne bryły względem poszczególnych płaszczyzn prostokątnego układu współrzędnych będą dane wzorami:

$$S_{yz} = \int_m x dm, \quad S_{zx} = \int_m y dm, \quad S_{xy} = \int_m z dm. \quad (4.22)$$

Z porównania wzoru (4.21) ze wzorem (4.7) na promień wodzący \mathbf{r}_C środka masy (ciężkości) oraz wzorów (4.22) ze wzorami (4.8) na współrzędne środka masy wynika, że całki występujące w licznikach wzorów (4.7) i (4.8) są momentami statycznymi. W pierwszym przypadku jest to moment statyczny względem początku układu współrzędnych O , a w drugim są to momenty statyczne względem płaszczyzn yz , zx i xy . Zatem wzory (4.7) i (4.8) na promień wodzący \mathbf{r}_C środka masy C i jego współrzędne x_C , y_C , z_C możemy wyrazić za pomocą momentów statycznych:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\mathbf{S}}{m}, \quad (4.23)$$

$$x_C = \frac{S_{yz}}{m}, \quad y_C = \frac{S_{zx}}{m}, \quad z_C = \frac{S_{xy}}{m}. \quad (4.24)$$

Znając położenie środka masy C bryły lub układu materialnego, odpowiednie momenty statyczne możemy wyznaczyć z powyższych wzorów. Otrzymamy wtedy:

$$\mathbf{S} = \mathbf{r}_C m, \quad (4.25)$$

$$S_{yz} = x_C m, \quad S_{zx} = y_C m, \quad S_{xy} = z_C m. \quad (4.26)$$

Wzory (4.25) i (4.26) zostały wyprowadzone dla bryły, jednak do analogicznych wzorów dojdziemy, prowadząc podobne rozważania dla układu punktów materialnych. Stąd wynikające z tych wzorów wnioski będą dotyczyły również momentów statycznych układu punktów materialnych. Oto one:

a) Moment statyczny bryły lub układu punktów materialnych względem dowolnego punktu jest równy momentowi statycznemu masy całkowitej skupionej w środku masy (ciężkości) względem tego punktu.

b) Moment statyczny bryły lub układu punktów materialnych względem dowolnej płaszczyzny jest równy momentowi statycznemu masy całkowitej skupionej w środku masy (ciężkości) względem tej płaszczyzny.

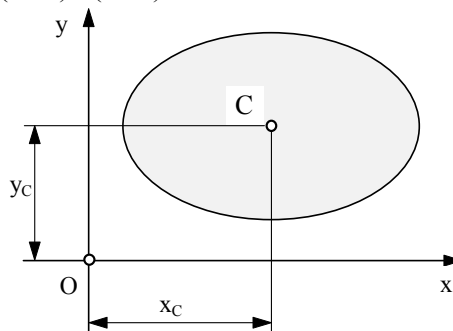
c) Moment statyczny bryły lub układu punktów materialnych względem środka masy (ciężkości) jest równy zeru.

d) Moment statyczny bryły lub układu punktów materialnych względem płaszczyzny przechodzącej przez środek masy (ciężkości) jest równy zeru.

Analogicznie do momentów statycznych mas (masowych momentów statycznych) wprowadza się pojęcie momentów statycznych objętości brył, powierzchni i linii. Momenty statyczne objętości, powierzchni i linii względem płaszczyzn prostokątnego układu współrzędnych są całkami występującymi odpowiednio w licznikach wzorów (4.12), (4.13) i (4.15).

Na szczególną uwagę zasługują momenty statyczne powierzchni figur płaskich względem osi, ponieważ mają duże zastosowanie w wytrzymałości materiałów. Całki występujące w licznikach wzorów są momentami statycznymi figury płaskiej względem osi y i x (rys. 4.8):

$$S_y = \int_F x dF, \quad S_x = \int_F y dF. \quad (4.27)$$



Rys. 4.8. Wyznaczanie położenia środka

Po takich oznaczeniach wzory (4.14) na współrzędne środka ciężkości figury płaskiej można zapisać w następujący sposób:

$$x_c = \frac{S_y}{F}, \quad y_c = \frac{S_x}{F}. \quad (4.28)$$

Stąd gdy znamy współrzędne środka ciężkości, możemy wyznaczyć momenty statyczne:

$$S_x = y_c F, \quad S_y = x_c F, \quad (4.29)$$

gdzie F jest polem całkowitym powierzchni figury płaskiej