4.3. Twierdzenia Pappusa-Guldina

Do wyznaczania środków ciężkości jednorodnych linii płaskich i jednorodnych figur płaskich stosuje się dwa twierdzenia Pappusa-Guldina. Podamy je bez dowodów, a ich zastosowanie zilustrujemy prostymi przykładami. Zaznajomienie się z dowodami podanych niżej twierdzeń pozostawiamy Czytelnikowi.

Pierwsze twierdzenie Pappusa-Guldina

Pole powierzchni F, *powstałej przez obrót jednorodnej i płaskiej linii o długości* L *dookoła osi leżącej w płaszczyźnie tej linii i nie przecinającej jej, jest równe długości linii pomnożonej przez długość okręgu opisanego przy obrocie przez jej środek ciężkości:*

$$F = 2\pi\, h_C\, L\,, \tag{4.16}$$

gdzie h_C jest odległością środka ciężkości linii od osi obrotu.

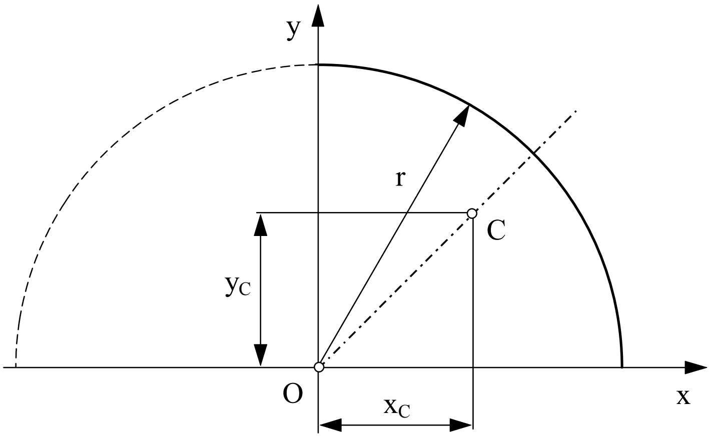
Drugie twierdzenie Pappusa-Guldina

Objętość bryły V*, powstałej przy obrocie figury płaskiej o polu* F *dookoła osi leżącej w płaszczyźnie tej figury i nie przecinającej jej, jest równe polu powierzchni figury pomnożonemu przez długość okręgu opisanego przy obrocie przez jej środek ciężkości:*

$$V = 2\pi\, h_C\, F\,, \tag{4.17}$$

przy czym h_C jest tutaj odległością środka ciężkości figury od osi obrotu.

Przykład 4.2. Wyznaczyć położenie środka ciężkości jednorodnego łuku ćwiartki koła przedstawionego na rys. 4.6.



Rys. 4.6. Zastosowanie pierwszego twierdzenia Pappusa-Guldina do wyznaczenia środka ciężkości łuku kołowego

Rozwiązanie. Z uwagi na to, że przedstawiony łuk ma oś symetrii, jego środek ciężkości będzie leżał na tej osi. Ponieważ oś symetrii jest dwusieczną kąta prostego zawartego między osią x i y, współrzędne x_C i y_C środka ciężkości C będą równe: $x_C = y_C$. Wystarczy zatem wyznaczyć jedną z nich. Wyznaczymy współrzędną x_C, korzystając z pierwszego twierdzenia Pappusa-Guldina. Przy obrocie łuku wokół osi y otrzymamy powierzchnię w postaci połowy kuli o powierzchni

$$F = 2\pi r^2 .$$

Długość łuku

$$L = \frac{\pi r}{2} .$$

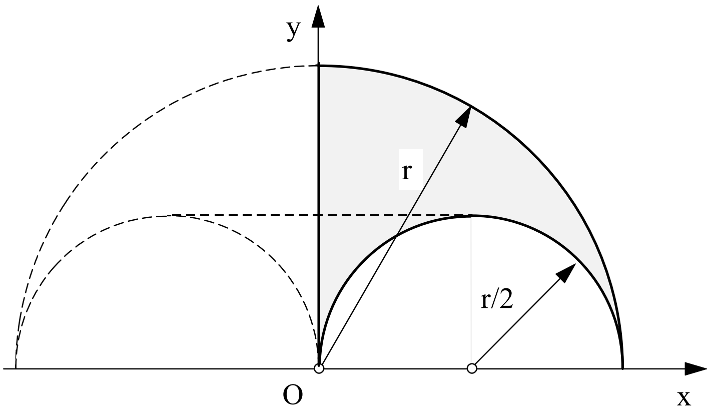
Po podstawieniu tych wartości do wzoru (4.16) otrzymamy równanie:

$$2\pi r^2 = 2\pi x_C \frac{\pi r}{2} ,$$

stąd

$$x_C = y_C = \frac{2r}{\pi} .$$

Przykład 4.3. Wyznaczyć położenie środka ciężkości figury płaskiej przedstawionej na rys. 4.7.



Rys. 4.7. Zastosowanie drugiego twierdzenia Pappusa-Guldina do wyznaczenia środka ciężkości figury płaskiej

Rozwiązanie. Do wyznaczenia współrzędnych x_C i y_C środka ciężkości przedstawionej na rysunku figury płaskiej zastosujemy drugie twierdzenie Pappusa--Guldina. Współrzędną y_C wyznaczymy przez obrócenie figury wokół osi x, a współrzędną x_C przez obrót wokół osi y. Przy obrocie figury wokół osi x otrzymamy bryłę o objętości równej różnicy półkuli o promieniu r i kuli o promieniu 0,5r.

$$V = \frac{2}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^3 = \frac{\pi r^3}{2}.$$

Pole figury

$$F = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{\pi}{2}\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{8}.$$

Po podstawieniu obliczonych wartości V i F do wzoru (4.17) otrzymamy:

$$\frac{\pi r^3}{2} = 2\pi y_C \frac{\pi r^2}{8},$$

stąd

$$y_C = \frac{2r}{\pi}.$$

Przy obrocie figury wokół osi y otrzymamy bryłę o objętości

$$V' = 2\pi\, x_C F\,. \tag{a}$$

Wielkość V' jest różnicą objętości V_1 półkuli o promieniu r i połowy torusa o objętości V_2, powstałego z obrotu półkuli o promieniu 0,5r wokół osi y:

$$V' = V_1 - V_2\,.$$

Do obliczenia objętości V_2 połowy torusa również zastosujemy drugie twierdzenie Pappusa-Guldina. Do wzoru (4.17) zamiast h_C wstawimy 0,5r.

$$V_2 = 2\pi\left(\frac{r}{2}\right)\frac{\pi}{2}\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2 r^3}{8}\,.$$

Zatem

$$V' = \frac{2\pi\, r^3}{3} - \frac{\pi^2 r^3}{8} = \left(16 - 3\pi\right)\frac{\pi\, r^3}{24}\,.$$

Po podstawieniu tej wartości oraz wyliczonej uprzednio powierzchni F do wzoru (a) otrzymamy równanie:

$$\left(16 - 3\pi\right)\frac{\pi\, r^3}{24} = 2\pi\, x_C\, \frac{\pi\, r^2}{8}\,,$$

a stąd

$$x_C = \left(16 - 3\pi\right)\frac{r}{6\pi}\,.$$