

6.1. Rodzaje momentów bezwładności

W punkcie (4.4) poznaliśmy wielkości charakteryzujące rozkład masy, nazywane momentami statycznymi. W podanych tam wzorach (4.20) współrzędne występują w pierwszej potęgze. Przekonamy się, że w dynamice doniosłą rolę odgrywają wielkości, w których rozkład masy będzie opisany iloczynem masy punktu i kwadratu jego odległości od punktu, płaszczyzny lub osi. Wielkości te nazywamy *masowymi momentami bezwładności* lub krótko *momentami bezwładności*, albo momentami statycznymi drugiego rzędu.

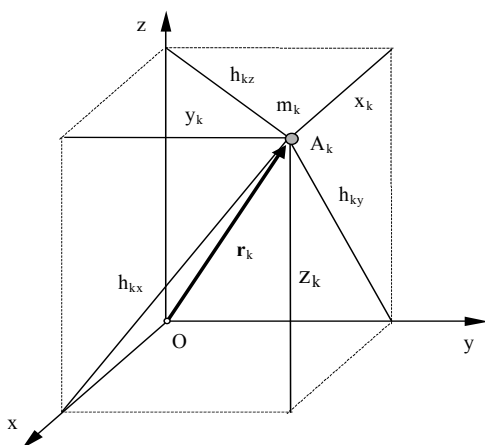
Momentem bezwładności punktu materialnego względem bieguna (punktu), płaszczyzny lub osi nazywamy iloczyn masy tego punktu i kwadratu jego odległości od bieguna, płaszczyzny lub osi.

Z powyższej definicji wynika, że istnieją trzy rodzaje momentów bezwładności:

- 1) biegunowe (momenty bezwładności względem punktu),
- 2) względem płaszczyzn,
- 3) względem osi (osiowe momenty bezwładności).

W dalszej kolejności zajmiemy się momentami bezwładności układu punktów materialnych i bryły.

6.2. Momenty bezwładności układu punktów materialnych



Rys. 6.1. Opis położenia punktu materialnego

Założmy, że mamy układ materialny złożony z n punktów materialnych o masach m_k znajdujących się w punktach A_k opisanych wektorami wodzącymi \mathbf{r}_k (rys. 6.1).

$$\mathbf{r}_k = x_k \mathbf{i} + y_k \mathbf{j} + z_k \mathbf{k}.$$

Biegunowym momentem bezwładności I_O układu punktów materialnych względem punktu O nazywamy sumę iloczynów mas m_k i kwadratów ich odległości r_k^2 od punktu O , czyli

$$I_O = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2 = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2). \quad (6.1)$$

Momentami bezwładności I_{xy} , I_{yz} , I_{zx} względem płaszczyzn xy , yz , zx układu punktów materialnych nazywamy sumy iloczynów mas m_k przez kwadraty ich odległości od tych płaszczyzn. Zatem mamy:

$$I_{xy} = \sum_{k=1}^n m_k z_k^2, \quad I_{yz} = \sum_{k=1}^n m_k x_k^2, \quad I_{zx} = \sum_{k=1}^n m_k y_k^2. \quad (6.2)$$

Momentami bezwładności I_x , I_y , I_z względem osi x , y , z układu punktów materialnych nazywamy sumy iloczynów mas m_k oraz kwadratów ich odległości od tych osi:

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \sum_{k=1}^n m_k h_{kx}^2 = \sum_{k=1}^n m_k (y_k^2 + z_k^2), \\ I_y &= \sum_{k=1}^n m_k h_{ky}^2 = \sum_{k=1}^n m_k (z_k^2 + x_k^2), \\ I_z &= \sum_{k=1}^n m_k h_{kz}^2 = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2) \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Oprócz zdefiniowanych wyżej momentów bezwładności względem punktu, płaszczyzn i osi w dynamice ważną rolę odgrywają wielkości, które nazywamy *momentami dewiacyjnymi* (albo momentami mieszanymi lub odśrodkowymi).

Momentami dewiacyjnymi D_{xy} , D_{yz} , D_{zx} układu punktów materialnych nazywamy sumę iloczynów mas m_k przez iloczyn ich odległości od dwóch prostopadłych płaszczyzn yz i zx , zy i xy , xy i yz . Momenty te wyrażają wzory:

$$\left. \begin{aligned} D_{xy} = D_{yx} &= \sum_{k=1}^n m_k x_k y_k, \\ D_{yz} = D_{zy} &= \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k, \\ D_{zx} = D_{xz} &= \sum_{k=1}^n m_k z_k x_k. \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Momenty dewiacyjne mogą przyjmować wartości zarówno dodatnie, jak i ujemne, ponieważ w powyższych wzorach – w przeciwieństwie do momentów bezwładności – występują iloczyny, a nie kwadraty współrzędnych. Ponadto wykazemy, że jeżeli jedna z dwóch płaszczyzn, względem których obliczamy momenty dewiacyjne, jest płaszczyzną symetrii rozpatrywanego układu materialnego (bryły), to odpowiednie momenty dewiacyjne są równe zeru.

Założmy, że płaszczyzną symetrii jest płaszczyzna xy . W tym przypadku każdemu punktowi A_k o współrzędnych x_k , y_k , z_k i masie m_k odpowiada – na zasadzie symetrii – inny punkt $A_{k'}$ o współrzędnych x_k , y_k , $-z_k$ i takiej samej masie m_k . Momenty dewiacyjne tych dwóch punktów będą równe zeru:

$$\begin{aligned} m_k x_k z_k + m_k x_k (-z_k) &= m_k x_k (z_k - z_k) = 0, \\ m_k y_k z_k + m_k y_k (-z_k) &= m_k y_k (z_k - z_k) = 0, \end{aligned}$$

czyli dwa z trzech momentów dewiacyjnych będą równe zeru:

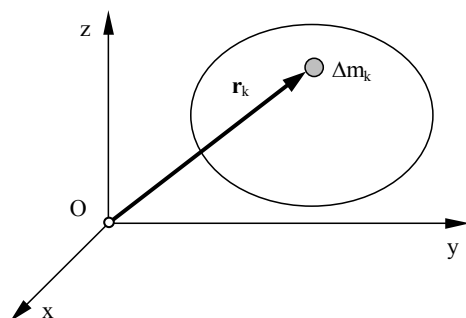
$$D_{zx} = D_{yz} = 0.$$

Łatwo się przekonać, że jeżeli układ materialny ma dwie płaszczyzny symetrii, to wszystkie momenty dewiacyjne będą równe zeru.

Powyzsza własność momentów dewiacyjnych ma duże znaczenie w obliczeniach praktycznych.

6.3. Momenty bezwładności bryły

Jeżeli bryłę o masie m podzielimy myślowo na n małych elementów o masach



Rys. 6.2. Opis położenia dowolnego elementu bryły sztywnej

Δm_k (rys. 6.2), to przybliżone wartości momentów bezwładności tych elementów, traktowanych jako punkty materialne, możemy obliczyć ze wzorów (6.1)–(6.4) na momenty bezwładności układu punktów materialnych.

Dokładne wartości momentów bezwładności otrzymamy, biorąc granicę sum przy liczbie elementów n dążących do nieskończoności. Wtedy zamiast sum otrzymamy całki rozciągnięte na całą masę m .

Biegunowy moment bezwładności

$$I_O = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta m_k r_k^2 = \int_m r^2 dm = \int_m (x^2 + y^2 + z^2) dm \quad \text{Z rachunku całkowego}$$

wiadomo, że całka sumy funkcji jest równa sumie całek poszczególnych funkcji:

$$I_O = \int_m (x^2 + y^2 + z^2) dm = \int_m x^2 dm + \int_m y^2 dm + \int_m z^2 dm. \quad (6.5)$$

Występujące w powyższym wzorze całki są *momentami bezwładności względem płaszczyzn*:

$$I_{yz} = \int_m x^2 dm, I_{zx} = \int_m y^2 dm, I_{xy} = \int_m z^2 dm. \quad (6.6)$$

Ze wzoru (6.5) wynika następujące twierdzenie:

Biegunowy moment bezwładności jest równy sumie momentów bezwładności względem trzech prostopadłych płaszczyzn przechodzących przez ten biegun:

$$I_O = I_{yz} + I_{zx} + I_{xy}. \quad (6.7)$$

Zależności na *momenty bezwładności względem osi* mają postać:

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2) dm = \int y^2 dm + \int z^2 dm, \\ I_y &= \int (z^2 + x^2) dm = \int z^2 dm + \int x^2 dm, \\ I_z &= \int (x^2 + y^2) dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm. \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

W powyższych wzorach łatwo można zauważyć, że związki między momentami bezwładności względem osi i względem płaszczyzn są następujące:

$$I_x = I_{zx} + I_{xy}, I_y = I_{xy} + I_{yz}, I_z = I_{yz} + I_{zx}. \quad (6.9)$$

Z pierwszego wzoru (6.9) wynika, że moment bezwładności I_x względem osi x jest sumą momentów bezwładności względem płaszczyzn xy i zx przecinających się wzdłuż tej osi. Podobne wnioski wynikają z dwóch pozostałych wzorów. Można zatem sformułować twierdzenie:

Moment bezwładności względem osi jest równy sumie momentów bezwładności względem dwóch prostopadłych płaszczyzn przecinających się wzdłuż tej osi.

Jeżeli dodamy stronami wzory (6.9) i uwzględnimy zależność (6.7), to otrzymamy zależność między biegunowym momentem bezwładności i momentami bezwładności względem osi:

$$I_O = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z). \quad (6.10)$$

Biegunowy moment bezwładności jest równy połowie sumy momentów bezwładności względem trzech prostopadłych osi przechodzących przez ten biegun.

Dewiacyjne momenty dla bryły można zapisać w postaci:

$$\left. \begin{aligned} D_{xy} &= D_{yx} = \int xy dm, \\ D_{yz} &= D_{zy} = \int yz dm, \\ D_{zx} &= D_{xz} = \int zx dm. \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

Jeżeli do wzorów (6.5), (6.6), (6.8) i (6.11) podstawimy zależność: $dm = \rho dV$, gdzie ρ jest gęstością bryły w punkcie o współrzędnych x, y, z , a V objętością, i założymy, że bryła jest jednorodna, to gęstość możemy wynieść przed znak całki. Otrzymamy wtedy wzory na momenty bezwładności w poniższej postaci:

a) biegunowy moment bezwładności

$$I_O = \rho \int_V (x^2 + y^2 + z^2) dV, \quad (6.12)$$

b) momenty bezwładności względem płaszczyzn

$$I_{yz} = \rho \int_V x^2 dV, \quad I_{zx} = \rho \int_V y^2 dV, \quad I_{xy} = \rho \int_V z^2 dV, \quad (6.13)$$

c) momenty bezwładności względem osi

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \rho \int_V (y^2 + z^2) dV, \\ I_y &= \rho \int_V (z^2 + x^2) dV, \\ I_z &= \rho \int_V (x^2 + y^2) dV, \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

d) momenty dewiacyjne

$$\left. \begin{aligned} D_{xy} &= D_{yx} = \rho \int_V xy dV, \\ D_{yz} &= D_{zy} = \rho \int_V yz dV, \\ D_{zx} &= D_{xz} = \rho \int_V zx dV. \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

Całki występujące we wzorach (6.12)–(6.15) nazywamy geometrycznymi momentami bezwładności, zależnymi tylko od kształtu ciała. Ogólnie można powiedzieć, że masowy moment bezwładności jest iloczynem gęstości przez geometryczny moment bezwładności.

Każdy moment bezwładności I można w sposób umowny przedstawić w postaci iloczynu całkowitej masy ciała (układu materialnego, bryły) m i kwadratu pewnej odległości i^2 od przyjętej płaszczyzny, osi lub bieguna. Odległość tę nazywamy *promieniem bezwładności* ciała względem danej płaszczyzny, osi lub bieguna. Ogólnie można zapisać:

$$I = m i^2. \quad (6.16)$$

Tak zdefiniowany promień bezwładności ma praktyczne zastosowanie przy obliczaniu momentów bezwładności elementów maszyn.

W obliczeniach teoretycznych w dynamice maszyn często występuje konieczność przedstawienia momentu bezwładności w postaci iloczynu pewnej masy m_{red} i kwadratu znanej odległości k^2 , czyli

$$I = m_{\text{red}} k^2. \quad (6.17)$$

Masę m_{red} nazywamy *masą zredukowaną*.

Jednostką miary momentu bezwładności jest:

- a) w układzie SI $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$,
- b) w układzie technicznym $1 \text{ kG} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$.

6.4. Transformacja równoległa momentów bezwładności

Przyjmijmy dwa układy współrzędnych x, y, z i x', y', z' o osiach odpowiednio równoległych. Układ x, y, z ma początek w dowolnym punkcie O , a układ x', y', z' w środku masy C bryły (rys. 6.3).

Środek masy bryły C jest opisany w układzie współrzędnych x, y, z przez wektor wodzący

$$\mathbf{r}_C = x_C \mathbf{i} + y_C \mathbf{j} + z_C \mathbf{k}.$$

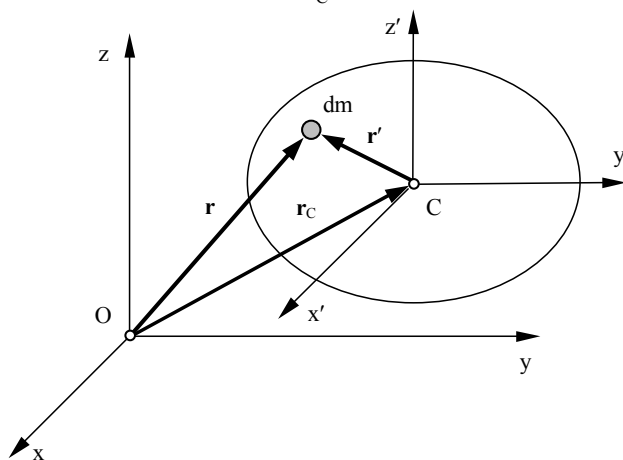
Położenie elementu masy dm jest określone w układzie x, y, z przez wektor wodzący $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$,

a w układzie x', y', z' przez wektor

$$\mathbf{r}' = x' \mathbf{i}' + y' \mathbf{j}' + z' \mathbf{k}'.$$

Wektory te są związane zależnością:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_C + \mathbf{r}'.$$



Rys. 6.3. Opis położenia dowolnego elementu bryły sztywnej względem osi równoległych

Zatem współrzędne elementu masy dm w układzie współrzędnych x, y, z będą wyrażały wzory:

$$x = x_C + x', y = y_C + y', z = z_C + z'. \quad (6.18)$$

Biegunowy moment bezwładności względem punktu O wyraża wzór:

$$\begin{aligned}
I_O &= \int_m r^2 dm = \int_m (\mathbf{r}_C + \mathbf{r}')^2 dm = \int_m r_C^2 dm + 2 \int_m \mathbf{r}_C \cdot \mathbf{r}' dm + \int_m (r')^2 dm = \\
&= r_C^2 \int_m dm + 2 \mathbf{r}_C \cdot \int_m \mathbf{r}' dm + \int_m (r')^2 dm.
\end{aligned}$$

Pierwsza całka jest całkowitą masą bryły, a druga momentem statycznym względem środka masy, czyli jest równa zero. Zatem

$$m = \int_m dm \quad \text{oraz} \quad \int_m \mathbf{r}' dm = 0.$$

Trzecia z całek jest biegunowym momentem bezwładności względem środka masy:

$$I_C = \int_m (r')^2 dm.$$

Ostatecznie biegunowy moment bezwładności względem dowolnego punktu

$$I_O = I_C + m r_C^2. \quad (6.19)$$

Na podstawie powyższego równania można sformułować twierdzenie, nazywane *twierdzeniem Steinera* dla biegunowych momentów bezwładności:

Moment bezwładności bryły (ciała materialnego) względem dowolnego punktu jest równy sumie momentu bezwładności względem środka masy i iloczynu masy bryły przez kwadrat odległości danego punktu od środka masy.

Obecnie udowodnimy twierdzenie Steinera dla momentów bezwładności względem płaszczyzn i względem osi. Jeżeli we wzorze (6.19) moment I_C wyrazimy przez momenty bezwładności względem płaszczyzn $x'y'$, $y'z'$ i $z'y'$ (wzór 6.7) oraz podstawimy

$$r_C^2 = x_C^2 + y_C^2 + z_C^2,$$

to po uporządkowaniu otrzymamy:

$$\begin{aligned}
I_O &= I_{x'y'} + I_{y'z'} + I_{z'y'} + m(x_C^2 + y_C^2 + z_C^2) = \\
&= (I_{x'y'} + m z_C^2) + (I_{y'z'} + m x_C^2) + (I_{z'y'} + m y_C^2).
\end{aligned}$$

Wyrażenia w nawiasach w powyższym wzorze są momentami bezwładności względem płaszczyzn xy , yz i zx .

$$\left. \begin{aligned} I_{xy} &= I_{x'y'} + mz_C^2, \\ I_{yz} &= I_{y'z'} + mx_C^2, \\ I_{zx} &= I_{z'x'} + my_C^2. \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

Wzory te wyrażają *twierdzenie Steinera* dla momentów bezwładności względem płaszczyzn:

Moment bezwładności ciała materialnego względem dowolnej płaszczyzny jest równy sumie momentu bezwładności względem płaszczyzny równoległej przechodzącej przez środek masy oraz iloczynu masy ciała i kwadratu odległości między tymi płaszczyznami.

Jeżeli dodamy do siebie kolejno równania trzecie i pierwsze, pierwsze i drugie oraz drugie i trzecie, to zgodnie ze wzorami (6.9) otrzymamy momenty bezwładności odpowiednio względem osi x , y i z .

$$\left. \begin{aligned} I_x &= I_{z'x'} + I_{x'y'} + m(y_C^2 + z_C^2) = I_{x'} + mh_x^2, \\ I_y &= I_{x'y'} + I_{y'z'} + m(z_C^2 + x_C^2) = I_{y'} + mh_y^2, \\ I_z &= I_{y'z'} + I_{z'x'} + m(x_C^2 + y_C^2) = I_{z'} + mh_z^2, \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

gdzie

$$h_x^2 = y_C^2 + z_C^2, \quad h_y^2 = z_C^2 + x_C^2, \quad h_z^2 = x_C^2 + y_C^2$$

i są to kwadraty odległości odpowiednio między osiami x i x' , y i y' oraz z i z' .

Wzory (6.21) przedstawiają *twierdzenie Steinera* dla momentów bezwładności względem osi:

Moment bezwładności ciała materialnego względem dowolnej osi jest równy sumie momentu bezwładności względem osi równoległej przechodzącej przez środek masy oraz iloczynu masy ciała i kwadratu odległości między osiami.

Twierdzenia opisane wzorami (6.20) i (6.21) można też udowodnić, podstawivszy do wzorów (6.13) i (6.14) zależności (6.18).

Po podstawieniu do wzorów (6.11) zależności (6.18) i uwzględnieniu, że momenty statyczne względem płaszczyzn przechodzących przez środek masy są równe zero, otrzymamy *twierdzenie Steinera* dla momentów dewiacyjnych.

$$\left. \begin{aligned} D_{xy} &= D_{x'y'} + mx_C y_C, \\ D_{yz} &= D_{y'z'} + my_C z_C, \\ D_{zx} &= D_{z'x'} + mz_C x_C. \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

6.5. Momenty bezwładności względem osi obróconej

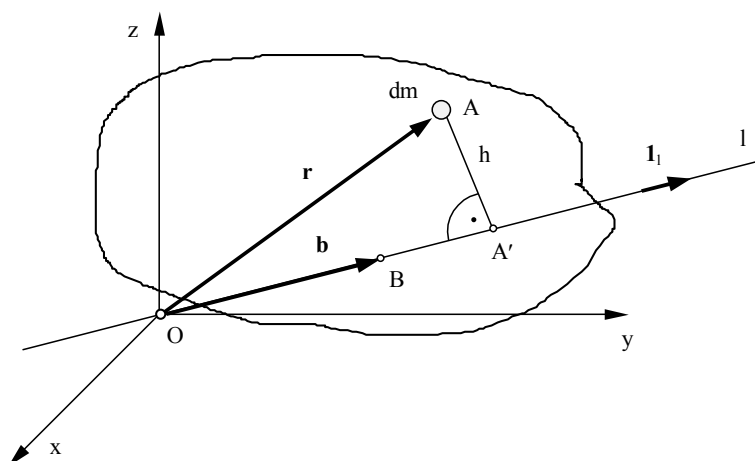
Założmy, że znamy momenty bezwładności względem osi I_x, I_y, I_z oraz momenty dewiacyjne D_{xy}, D_{yz}, D_{zx} w układzie współrzędnych x, y, z o początku w dowolnym punkcie O sztywno związanym z rozpatrywanym ciałem, a chcemy wyznaczyć moment bezwładności względem dowolnej osi l przechodzącej przez punkt O (rys. 6.4). W tym celu wytnijmy myślowo element masy dm opisany w układzie współrzędnych x, y, z przez wektor wodzący

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

i oddalony od osi l o wielkość h .

Momenty bezwładności względem osi l obliczymy ze wzoru:

$$I_l = \int h^2 dm. \quad (6.23)$$



Rys. 6.4. Wyznaczenie momentu bezwładności bryły sztywnej względem dowolnej osi przechodzącej przez początek układu współrzędnych

W celu wyznaczenia odległości h w funkcji współrzędnych wektora \mathbf{r} kierunek prostej l określimy za pomocą wektora jednostkowego \mathbf{l}_1 . Wektor ten możemy zapisać w układzie x, y, z za pomocą wzoru:

$$\mathbf{l}_1 = \alpha_x \mathbf{i} + \alpha_y \mathbf{j} + \alpha_z \mathbf{k},$$

gdzie α_x, α_y i α_z są kosinusami kierunkowymi kątów między osią l i osiami x, y, z (patrz punkt 5.3.1) spełniającymi zależność:

$$\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = 1. \quad (6.24)$$

Z trójkąta prostokątnego OAA' (rys. 6.4) mamy:

$$\begin{aligned} h^2 &= r^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{1}_l)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x\alpha_x + y\alpha_y + z\alpha_z)^2 = \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - (\alpha_x^2 x^2 + \alpha_y^2 y^2 + \alpha_z^2 z^2 + 2\alpha_x \alpha_y xy + 2\alpha_y \alpha_z yz + 2\alpha_z \alpha_x zx) = \\ &= x^2(1 - \alpha_x^2) + y^2(1 - \alpha_y^2) + z^2(1 - \alpha_z^2) - 2\alpha_x \alpha_y xy - 2\alpha_y \alpha_z yz - 2\alpha_z \alpha_x zx. \end{aligned}$$

Po wyznaczeniu ze wzoru (6.24) wyrażeń:

$$(1 - \alpha_x^2) = (\alpha_y^2 + \alpha_z^2), \quad (1 - \alpha_y^2) = (\alpha_z^2 + \alpha_x^2), \quad (1 - \alpha_z^2) = (\alpha_x^2 + \alpha_y^2)$$

i podstawieniu do powyższego wzoru oraz odpowiednim pogrupowaniem wyrazów otrzymamy:

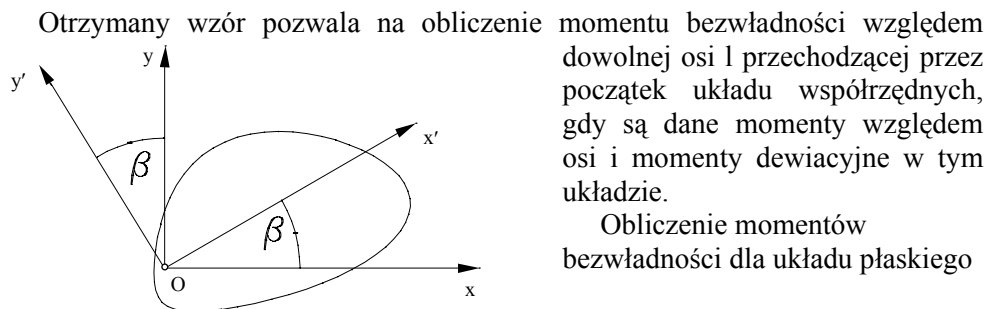
$$\begin{aligned} h^2 &= \alpha_x^2(y^2 + z^2) + \alpha_y^2(z^2 + x^2) + \alpha_z^2(x^2 + y^2) - \\ &- 2\alpha_x \alpha_y xy - 2\alpha_y \alpha_z yz - 2\alpha_z \alpha_x zx. \end{aligned}$$

Po podstawieniu otrzymanego wyniku do wzoru (6.23) uzyskamy wzór na moment bezwładności ciała materialnego względem osi l:

$$\begin{aligned} I_l &= \alpha_x^2 \int_m (y^2 + z^2) dm + \alpha_y^2 \int_m (z^2 + x^2) dm + \alpha_z^2 \int_m (x^2 + y^2) dm - \\ &- 2\alpha_x \alpha_y \int_m xy dm - 2\alpha_y \alpha_z \int_m yz dm - 2\alpha_z \alpha_x \int_m zx dm. \end{aligned}$$

W powyższym wzorze całki występujące przy kwadratach kosinusów kierunkowych są momentami bezwładności rozpatrywanego ciała względem osi układu współrzędnych x, y, z, a całki przy iloczynach tych kosinusów są momentami dewiacyjnymi w tymże układzie współrzędnych. Ostatecznie mamy:

$$I_l = \alpha_x^2 I_x + \alpha_y^2 I_y + \alpha_z^2 I_z - 2\alpha_x \alpha_y D_{xy} - 2\alpha_y \alpha_z D_{yz} - 2\alpha_z \alpha_x D_{zx}. \quad (6.25)$$



Rys. 6.5. Wyznaczenie momentów bezwładności figury płaskiej względem osi obróconych

Otrzymany wzór pozwala na obliczenie momentu bezwładności względem dowolnej osi l przechodzącej przez początek układu współrzędnych, gdy są dane momenty względem osi i momenty dewiacyjne w tym układzie.

Obliczenie momentów bezwładności dla układu płaskiego

względem osi obróconych x' i y' (rys. 6.5) nie nastęcza trudności. Kosinusy kierunkowe między osią x' i osiami x, y, z są następujące:

$$\alpha_x = \cos\beta, \alpha_y = \cos(90 - \beta) = \sin\beta, \alpha_z = \cos 90^\circ,$$

a między osią y' i osiami x, y, z

$$\alpha_x = \cos(90 + \beta) = -\sin\beta, \alpha_y = \cos\beta, \alpha_z = \cos 90^\circ.$$

Przyjąwszy we wzorze (6.25) raz za oś x' , a drugi raz oś y' i podstawivszy otrzymane zależności na kosinusy kierunkowe, otrzymamy wzory na momenty bezwładności względem osi x' i y' :

$$\left. \begin{aligned} I_{x'} &= I_x \cos^2\beta + I_y \sin^2\beta - D_{xy} \sin 2\beta, \\ I_{y'} &= I_x \sin^2\beta + I_y \cos^2\beta + D_{xy} \sin 2\beta. \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

Wzory te mają zastosowanie między innymi w wytrzymałości materiałów do obliczania momentów bezwładności figur płaskich (przekrojów poprzecznych belek, prętów itp.) oraz do wyznaczania osi, względem których momenty bezwładności osiągają wartości ekstremalne.

Dla układu przestrzennego wyznaczenie momentów bezwładności względem trzech wzajemnie prostopadłych osi obróconych względem osi x, y, z jest znacznie trudniejsze. Zastanówmy się, jak będzie się zmieniał moment bezwładności I_1 , gdy oś l będzie się obracać wokół punktu O . W tym celu obierzmy na tej osi wektor $\mathbf{b} = \mathbf{OB} = b\mathbf{l}_1$ (rys. 6.4) o długości odwrotnie proporcjonalnej do pierwiastka kwadratowego z momentu bezwładności I_1 :

$$b = OB = \frac{1}{\sqrt{I_1}}.$$

W czasie przyjmowania przez oś l wszystkich możliwych położenia koniec wektora b zakreśli pewną powierzchnię, której równanie obecnie wyprowadzimy.

Współrzędne wektora b (równe współrzędnym punktu B) w układzie współrzędnych x, y, z oznaczmy przez η_x, η_y, η_z . Będą one równe rzutom tego wektora na osie x, y, z :

$$\eta_x = \mathbf{b} \cdot \mathbf{i} = \frac{\alpha_x}{\sqrt{I_1}}, \eta_y = \mathbf{b} \cdot \mathbf{j} = \frac{\alpha_y}{\sqrt{I_1}}, \eta_z = \mathbf{b} \cdot \mathbf{k} = \frac{\alpha_z}{\sqrt{I_1}}. \quad (6.27)$$

Po podzieleniu obustronnie równania (6.25) przez I_1 i podstawieniu do niego współrzędnych (6.27) otrzymamy:

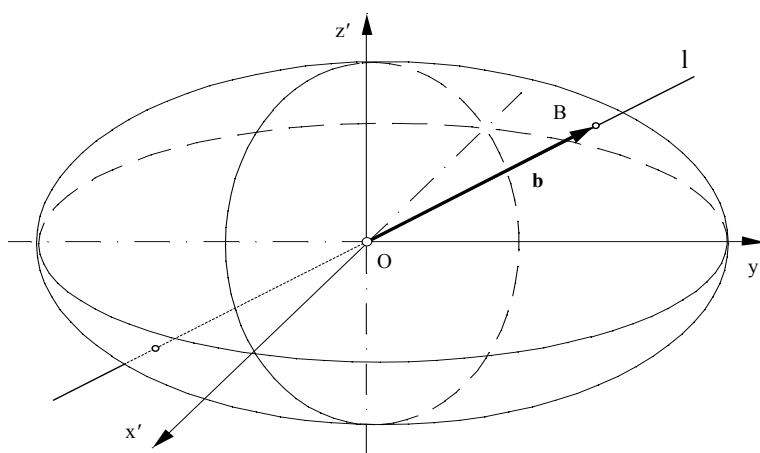
$$I_x \eta_x^2 + I_y \eta_y^2 + I_z \eta_z^2 - 2D_{xy} \eta_x \eta_y - 2D_{yz} \eta_y \eta_z - 2D_{zx} \eta_z \eta_x = 1. \quad (6.28)$$

Jest to równanie szukanej powierzchni zakreślonej przez koniec wektora \mathbf{b} przy dowolnym obrocie osi l wokół punktu O . Powierzchnia ta jest elipsoidą trójosiową, nazywaną *elipsoidą bezwładności*.

Elipsoidą bezwładności nazywamy miejsce geometryczne punktów, których odległości od początku układu są odwrotnie proporcjonalne do pierwiastka kwadratowego z momentu bezwładności względem osi przechodzącej przez dany punkt i początek układu współrzędnych.

Występujące w równaniu elipsoidy bezwładności momenty bezwładności I_x, I_y, I_z i momenty dewiacyjne D_{xy}, D_{yz}, D_{zx} są współczynnikami równania (6.28) i będą się one zmieniać wraz z obrotem układu współrzędnych, natomiast kształt i położenie elipsoidy nie ulegną zmianie.

Elipsoida bezwładności opisuje zatem obiektywne cechy układu materialnego niezależnie od przyjętego układu współrzędnych.



Rys. 6.6. Elipsoida bezwładności

Wiadomo, że trójosiowa elipsoida ma trzy prostopadłe osie. Zatem możemy przyjąć taki układ współrzędnych, aby jego osie x' , y' , z' pokrywały się z osiami elipsoidy (rys. 6.6). Wtedy równanie elipsoidy będzie miało postać:

$$I_{x'}\eta_{x'}^2 + I_{y'}\eta_{y'}^2 + I_{z'}\eta_{z'}^2 = 1. \quad (6.29)$$

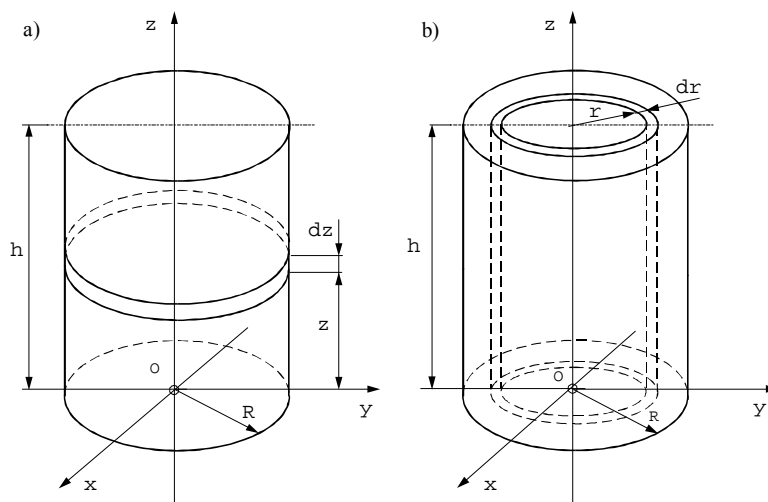
W takim układzie współrzędnych momenty dewiacyjne są równe zeru. W każdym punkcie układu materialnego istnieją co najmniej trzy prostopadłe osie, takie że momenty dewiacyjne w utworzonym przez nie kartezjańskim układzie współrzędnych są równe zeru. Osie te nazywamy *głównymi osiami bezwładności*, a osiowe momenty względem nich *głównymi momentami bezwładności*.

Jeżeli początek układu współrzędnych pokrywa się ze środkiem ciężkości, to osie główne nazywamy *głównymi centralnymi osiami bezwładności*, a momenty *głównymi centralnymi momentami bezwładności*.

W czasie rozwiązywania zagadnień praktycznych należy pamiętać, że osią główną jest:

- a) każda oś symetrii,
- b) każda prosta prostopadła do płaszczyzny symetrii.

Przykład 6.1. Dla jednorodnego prostego walca kołowego o masie m , promieniu podstawy R i wysokości h wyznaczyć momenty bezwładności względem osi x , y , z układu współrzędnych prostokątnych o początku w punkcie O pokrywającym się ze środkiem podstawy (rys. 6.7).



Rys. 6.7. Wyznaczanie momentów bezwładności jednorodnego walca obrotowego o masie m

Rozwiązanie. Do wyznaczenia momentów bezwładności względem osi skorzystamy z zależności (6.9) między momentami bezwładności względem osi i względem płaszczyzn. Dla momentów względem osi x i y mamy zależności:

$$I_x = I_{zx} + I_{xy}, I_y = I_{xy} + I_{yz}.$$

Ze względu na symetrię momenty bezwładności względem płaszczyzn zx i yz są równe:

$$I_{zx} = I_{yz}. \quad (a)$$

Stąd momenty względem osi x i y

$$I_x = I_y = I_{zx} + I_{xy}. \quad (b)$$

Moment bezwładności względem osi z jest równy sumie momentów względem płaszczyzn yz i zx. Po uwzględnieniu wzoru (a) mamy:

$$I_z = I_{yz} + I_{zx} = 2I_{zx},$$

stąd

$$I_{zx} = \frac{1}{2} I_z. \quad (c)$$

Ze wzorów (b) i (c) wynika, że aby wyznaczyć momenty bezwładności względem osi x i y, należy wyznaczyć momenty bezwładności względem płaszczyzny xy oraz osi z. W pierwszej kolejności wyznaczymy moment bezwładności względem płaszczyzny xy z trzeciego wzoru (6.13):

$$I_{xy} = \rho \int_V z^2 dV. \quad (d)$$

W tym celu wytniemy z walca dwiema płaszczyznami prostopadłymi do osi z element o grubości dz (rys. 6.7a). Objętość tego elementu

$$dV = \pi R^2 dz.$$

Po podstawieniu tej wielkości do wzoru (d) i wykonaniu całkowania otrzymujemy:

$$I_{xy} = \rho \int z^2 \pi R^2 dz = \rho \pi R^2 \int_0^h z^2 dz = \frac{\rho \pi R^2 h^3}{3}.$$

Po uwzględnieniu, że masa walca $m = \rho \pi R^2 h$ powyższy wzór możemy zapisać w postaci:

$$I_{xy} = \frac{mh^2}{3}. \quad (e)$$

W celu obliczenia momentu bezwładności względem osi z wydzielimy myślowo z walca dwiema powierzchniami walcowymi o promieniach równych odpowiednio r i $r + dr$ warstwę elementarną o grubości dr . Objętość wydzielonego elementu

$$dV = 2\pi r h dr.$$

Moment bezwładności względem osi z wyznaczymy z trzeciego wzoru (6.14).

$$I_z = \rho \int_V (x^2 + y^2) dV = \rho \int_V r^2 dV = 2\rho\pi h \int_0^R r^3 dr = \frac{\rho\pi h R^4}{2},$$

a po wprowadzeniu masy

$$I_z = \frac{mR^2}{2}. \quad (f)$$

Po podstawieniu do zależności (b) wzorów (e) oraz (c) po uwzględnieniu (f) otrzymamy momenty bezwładności względem osi x i y :

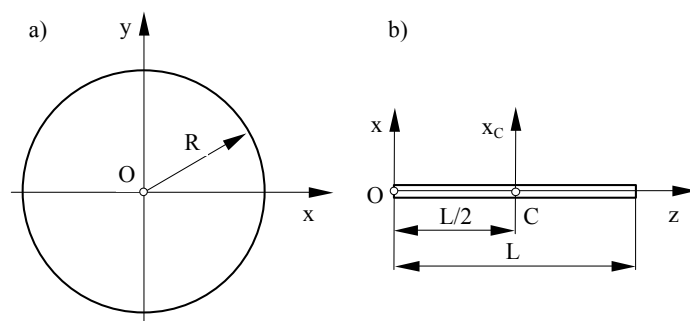
$$I_x = I_y = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right). \quad (g)$$

Wyznamy jeszcze promienie bezwładności walca względem osi. Na podstawie wzoru (6.16) otrzymujemy:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{m}} = \frac{R}{2}, i_x = i_y = \sqrt{\frac{I_x}{m}} = \frac{\sqrt{3R^2 + h^2}}{2\sqrt{3}}. \quad (h)$$

Czytelnikowi pozostawiamy wyznaczenie momentów bezwładności względem osi przechodzących przez środek ciężkości walca, równoległych do osi x , y , z , zaznaczonych na rys. 6.7.

Przykład 6.2. Wyznaczyć momenty bezwładności cienkiej jednorodnej tarczy kołowej o masie m i promieniu R (rys. 6.8a) oraz cienkiego jednorodnego pręta o masie m i długości L (rys. 6.8b).



Rys. 6.8. Wyznaczenie momentów bezwładności: a) jednorodnej tarczy kołowej o promieniu R i masie m , b) jednorodnego pręta o długości L i masie m

Rozwiązanie. Do wyznaczenia momentów bezwładności brył przedstawionych na rys. 6.8 wykorzystamy wyprowadzone w poprzednim przykładzie wzory (f) i (g) dla walca.

Momenty bezwładności tarczy wyznaczymy względem osi x , y , z z prostokątnego układu współrzędnych o początku w środku ciężkości O tarczy (rys. 6.8a). Ze względu na pomijalnie małą grubość tarczy moment bezwładności tarczy względem osi z jest jednocześnie biegunowym momentem bezwładności względem punktu O , czyli $I_z = I_O$. Ponieważ tarczę można uważać za walec o wysokości (grubości) zerowej ($h = 0$), moment bezwładności tarczy względem osi z będzie równy momentowi bezwładności walca względem osi z . Zatem zgodnie ze wzorem (f) z poprzedniego przykładu mamy:

$$I_z = I_O = \frac{mR^2}{2}. \quad (\text{a})$$

Ze względu na symetrię momenty bezwładności tarczy względem osi x i y są równe. Otrzymamy je po podstawieniu $h = 0$ do wzoru (g) wyprowadzonego dla walca:

$$I_x = I_y = \frac{mR^2}{4}. \quad (\text{b})$$

Promienie bezwładności tarczy względem osi x , y , z są następujące:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{m}} = \frac{R}{\sqrt{2}}, i_x = i_y = \sqrt{\frac{I_x}{m}} = \frac{R}{2}. \quad (\text{c})$$

Obecnie wyznaczmy moment bezwładności pręta względem osi x prostopadłej do osi podłużnej pręta, pokrywającej się z osią z (rys. 6.8b). Oś y jest prostopadła

do płaszczyzny rysunku. W tak przyjętym układzie współrzędnych ze względu na to, że zaniedbujemy wymiary poprzeczne pręta, momenty bezwładności względem płaszczyzn zx i yz są równe zero:

$$I_{zx} = I_{yz} = 0. \quad (d)$$

Zatem z pierwszego wzoru (6.9) mamy:

$$I_x = I_{xy}. \quad (e)$$

Momenty bezwładności pręta względem płaszczyzny xy otrzymamy po podstawieniu do wzoru (e) na moment bezwładności walca względem płaszczyzny xy zamiast wysokości h walca długości pręta L . Stąd

$$I_x = \frac{mL^2}{3}. \quad (f)$$

Wyznamy jeszcze moment bezwładności pręta względem osi symetrii x_c . W tym celu wykorzystamy twierdzenie Steinera dla momentów bezwładności względem osi (6.21):

$$I_x = I_{x_c} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2,$$

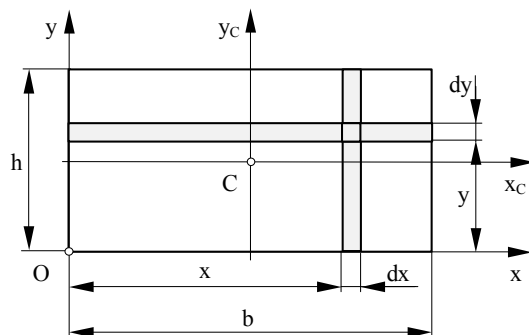
stąd

$$I_{x_c} = I_x - m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{3} - \frac{mL^2}{4} = \frac{mL^2}{12}. \quad (g)$$

Momenty bezwładności pręta względem osi x i y są jednocześnie biegunowymi momentami bezwładności odpowiednio względem końca pręta O i środka masy C :

$$I_x = I_O \quad \text{oraz} \quad I_{x_c} = I_C.$$

Wynika to bezpośrednio ze wzoru (6.7) po uwzględnieniu zależności (c) i (d).



Rys. 6.9. Wyznaczenie momentów bezwładności cienkiej jednorodnej płyty

Przykład 6.3. Wyznaczyć momenty bezwładności cienkiej jednorodnej prostokątnej płyty o masie m , podstawie b i wysokości h względem osi x i y przechodzących przez podstawę i bok płyty oraz osi symetrii x_c i y_c (rys. 6.9). Wyznaczyć również moment dewiacyjny D_{xy} .

Rozwiązanie. Momenty bezwładności względem osi x i y wyznaczmy z dwóch pierwszych wzorów (6.8), przyjmąwszy $z = 0$:

$$I_x = \int_m y^2 dm, I_y = \int_m x^2 dm.$$

W celu wyznaczenia momentu bezwładności względem osi x wydzielimy z płyty elementarny pasek w odległości y od podstawy, mający wysokość dy . Jeżeli gęstość powierzchniową płyty oznaczymy przez ρ_F , to masa elementarnego paska $dm = \rho_F dF = \rho_F b dy$. Stąd moment bezwładności względem osi x

$$I_x = \int_0^h y^2 \rho_F b dy = \rho_F b \int_0^h y^2 dy = \rho_F b \frac{h^3}{3} = \frac{mh^2}{3}, \quad (a)$$

gdzie masa płyty $m = \rho_F bh$.

Przy wyznaczaniu momentu bezwładności względem osi y podzielimy płytę na elementarne paski prostopadłe do osi x o szerokości dx . Mamy zatem: $dm = \rho_F h dx$. Moment bezwładności względem osi y

$$I_y = \int_0^b x^2 \rho_F h dx = \rho_F h \int_0^b x^2 dx = \frac{mb^2}{3}. \quad (b)$$

Moment dewiacyjny D_{xy} wyznaczmy z twierdzenia Steinera (6.22):

$$D_{xy} = D_{x_c y_c} + m \frac{b}{2} \frac{h}{2} = \frac{mbh}{4}, \quad (c)$$

ponieważ moment $D_{x_c y_c}$ względem głównych centralnych osi bezwładności jest równy zero.

Do wyznaczenia momentów bezwładności względem osi symetrii x_c i y_c skorzystamy z twierdzenia Steinera (6.21):

$$\left. \begin{aligned} I_{x_c} &= I_x - m \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{mh^2}{3} - \frac{mh^2}{4} = \frac{mh^2}{12}, \\ I_{y_c} &= I_y - m \left(\frac{b}{2} \right)^2 = \frac{mb^2}{3} - \frac{mb^2}{4} = \frac{mb^2}{12}. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$