

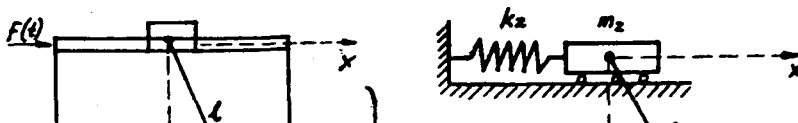
5.DRGANIA MODELU O DWU STOPNIACH SWOBODY (DSS)

Mimo dużych możliwości interpretacyjnych modelu o jednym stopniu swobody w dynamice obiektów mechanicznych, nie jest on w stanie wyjaśnić wszystkich zjawisk drganiowych, zwłaszcza w obiektach o budowie niejednorodnej z gwałtowną zmianą własności masowo-sprężysto-dyssypacyjnych. Taką gwałtowną zmianą będzie np. podparcie bryły sztywnej sprężynami i tłumikami w wielu płaszczyznach, podwieszenie do belki ciężaru na linie (wahadło), wstawienie podatnego sprzęgła w linii napędowej agregatu maszynowego, posadowienie operatora na amortyzowanym fotelu itp. We wszystkich tych przypadkach zamiast jednego stopnia swobody musimy uwzględnić kilka stopni swobody ruchu drganiowego. Najmniejszą komplikację wyróżnia się tu model o dwu stopniach swobody. Co więcej można na jego przykładzie wyjaśnić większość cech szczególnych układów o wielu stopniach swobody. Z drugiej strony gros zastosowań w dziedzinie minimalizacji drgań mieści się w kategoriach układów o dwu stopniach swobody. Mając na uwadze powyższe nasze dalsze rozważania ograniczymy do dwu stopni swobody (DSS), wskazując w niektórych miejscach na możliwość uogólnień.

5.1. OBIEKTY MECHANICZNE I ICH MODELE O DSS

Jak pamiętamy z rozdziału 2 oraz 3 zastąpienie obiektu mechanicznego właściwym modelem o JSS nie zawsze było łatwe. Znacznie trudniejsze jest to jednak dla modelu o DSS, gdyż tutaj dodatkowe trudności dochodzą na etapie „model fizyczny - model matematyczny”. Stosowana przez nas poprzednio metoda transformacji do modelu matematycznego za pomocą zasady d'Alemberta (dla ruchu postępowego lub obrotowego) nie zawsze jest pomocna. W wielu przypadkach przy budowie modelu matematycznego trzeba się posługiwać równaniami Lagrange'a II rodzaju [17], bądź nawet metodą sił lub przemieszczeń dla układów belkowych [16,18,19]. Pozostawiając z braku miejsca na uboczu dwie ostatnie metody pokażemy niżej kilka przykładów modelowania obiektów mechanicznych do modeli o DSS z wykorzystaniem równań Lagrange'a bądź zasady d'Alemberta.

Jako pierwszy obiekt weźmy pod uwagę suwnicę bramową podrywającą ukośnie nosiwo o masie M na linie o długości l , tak jak na rysunku 5.1. Przyjmując że sztywność belki nośnej suwnicy jest duża, mamy dwa wypadkowe ruchy drgające; suwnicy w kierunku x powstrzymywany przez sprężystość konstrukcji k_x i wzbudzany dodatkowo siłą $F(t)$ oraz ruch wahliwy nosiwa. Jeśli oznaczymy



Współrzędna masy suwnicy m_z : x , współrzędne masy nosiwa M : $x_1 = x + l \sin \phi$, $y_1 = l(1 - \cos \phi)$.

Stąd po wyliczeniu prędkości mamy:

energia kinetyczna

$$T = \frac{1}{2} m_z \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2} m_z \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\phi}l \cos \phi + l^2 \dot{\phi}^2) \approx \frac{1}{2} m_z \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\phi}l + l^2 \dot{\phi}^2). \quad (5.1)$$

Energia potencjalna

$$V = \frac{1}{2} k_z x^2 + Mgl (1 - \cos \phi) \approx \frac{1}{2} k_z x^2 + Mgl \frac{\phi^2}{2},$$

oraz praca przygotowana siły wymuszającej

$$\delta L = F(t) \delta x + Q \delta \phi = Q_x \delta x,$$

gdzie $\delta x, \delta \phi$, to przemieszczenie przygotowane.

Pamiętamy, że równania Lagrange'a [[17]] dla współrzędnej uogólnionej q_j .

mają postać:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j, \quad j=1, \dots, n, \quad (5.2)$$

gdzie D jest funkcją dyssypacji zależną od prędkości uogólnionej, zaś Q_j to siły uogólnione działające we współrzędnej o numerze j .

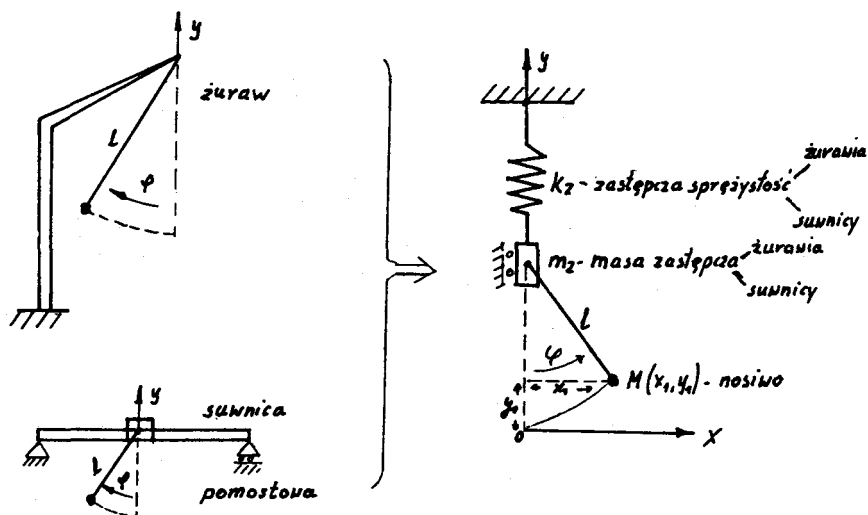
Zastosowanie tych równań do wyrażeń na energię (5.1) da nam ostatecznie równania ruchu modelu z rysunku 5.1 w postaci:

$$\begin{aligned} (m_z + M) \ddot{x} + Ml\ddot{\phi} + k_z x &= 0, \\ Ml^2 \ddot{\phi} + Ml\ddot{x} + Mgl\phi &= 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

Jak widać na skutek zastosowanych założeń o małej wartości kąta ϕ , co nie zawsze będzie słuszne,

otrzymaliśmy układ dwu równań różniczkowych liniowych sprzężonych poprzez przyspieszenia mas m_z, M .

Ten typ sprzężenia, powszechny dla układów z wahadłami, nosi nazwę sprzężenia bezwładnościowego. Sprzężenie to jest tu dość proste na skutek wymuszenia ruchu punktu zawieszenia wahadła jedynie w kierunku prostopadłym do kierunku sił ciężenia ziemskiego. W następnych dwu przykładach punkt zawieszenia liny będzie się poruszał w kierunku pionowym, co niewspółmiernie skomplikuje zagadnienie. Sytuację taką daje dźwig wieżowy, oraz suwnica pomostowa przedstawione schematycznie łącznie z modelem fizycznym na rysunku 5.2.



Rys.5.2. Schematyczny szkic żurawia i suwnicy pomostowej podnoszących ukośnie nosiwo oraz ich model fizyczny

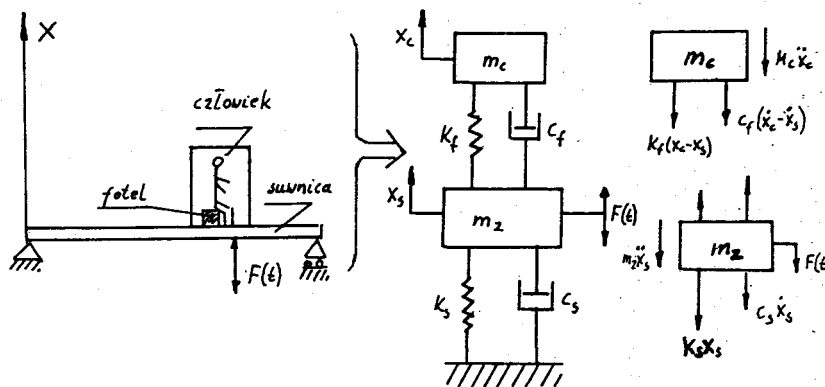
Obliczając energię kinetyczną i potencjalną modelu mamy:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= l \sin \varphi, & y_1 &= y + l (1 - \cos \varphi) \\
 T &= \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} M (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} M (l^2 \cos^2 \varphi \dot{\varphi}^2 + \\
 &+ (\dot{y} + l \sin \varphi \dot{\varphi})^2) = \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} M (\dot{y}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l \dot{\varphi} \dot{y} \sin \varphi) \approx \\
 &(\sin \varphi \approx \varphi) & (5.4) \\
 &\approx \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} M (\dot{y}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l \dot{\varphi} \dot{y} \varphi), \\
 V &= \frac{1}{2} k_z y^2 + Mg [y + l (1 - \cos \varphi)] = \frac{1}{2} k_z y^2 + Mg (y + \frac{1}{2} \varphi^2), \\
 &(\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2).
 \end{aligned}$$

Po podstawieniu energii do równań Lagrange'a otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 M (\ddot{y} + \underline{1\varphi\ddot{\varphi}} + \underline{1\dot{\varphi}^2}) + m_2 \ddot{y} + k_z y + Mg &= 0, \\
 M (l^2 \ddot{\varphi} + \underline{1\varphi\dot{y}}) + Mgl \varphi &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{5.5}$$

Jak widać mimo zastosowanych założeń o małej wartości kąta wychylenia nosiwa φ , równania ruchu sprzężone bezwładnościowo jak poprzednie są tutaj nieliniowe, gdyż zawierają iloczyny szukanych zmiennych (podkreślone). Rozwiązywanie takich równań nie jest proste i można je wykonać: analitycznie poprzez różnego typu linearyzację członów nieliniowych [np. 20], numerycznie całkując krok po kroku np. metodą różnic skończonych, oraz na modelu analogowym modelując elektrycznie równania różniczkowe i obserwując ich



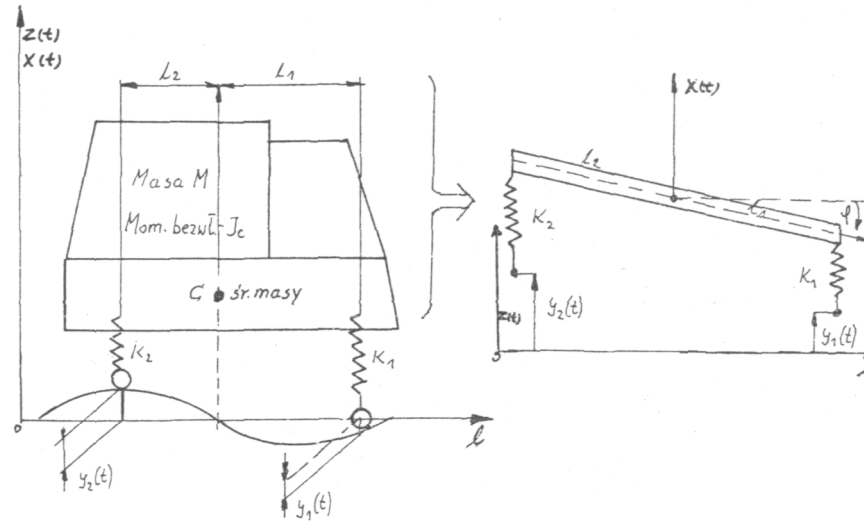
Rys.5.3. Suwnica pomostowa z operatorem i jej model fizyczny

Umieszczając zastępczą siłę wymuszającą $F(t)$ pod kabiną operatora można w tym samym miejscu skupić zastępczą masę, sztywność i tłumienie belki suwnicowej (o metodach takiej redukcji patrz w rozdziale ostatnim) k_s, m_z, c_s . Uznając, że ciało człowieka w pozycji siedzącej o masie m_c będzie sztywniejsze niż sprężynowanie fotela, k_f, c_f , mamy tym samym dokończony bardzo prosty model fizyczny naszego zagadnienia. Wystarczy tu zastosować znaną zasadę d'Alemberta (patrz rys. 5.3), by otrzymać:

$$\begin{aligned} m_c \ddot{x}_c + c_f(\dot{x}_c - \dot{x}_s) + k_f(x_c - x_s) &= 0, \\ m_z \ddot{x}_s + c_f(\dot{x}_s - \dot{x}_c) + k_f(x_s - x_c) + c_s \dot{x}_s + k_s x_s &= F(t). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Otrzymamy układ równań jest liniowy i posiada sprzężenie ruchu poprzez człony sprężyste, taką też nosi nazwę. Warto tu dodać, że równania o sprzężeniu bezwłasnościowym można doprowadzić przez odpowiednie liniowe przekształcenie do sprzężenia sztywnościowego i odwrotnie. Stąd też wnioski ogólne uzyskane dla jednego typu sprzężenia muszą być słuszne dla innych typów sprzężeń. Będzie to podstawą naszych dalszych rozważań.

Jako kolejny obiekt mechaniczny rozważmy jazdę samochodu po nierównościach, przy założeniu ruchu płaskiego i małych drgań (rys. 5.4).



Rys.5.4. Ruch pojazdu po nierównościach drogi i jego model fizyczny

Ruch pojazdu traktujemy jako płaski, tak więc ustalona jest prędkość liniowa środka masy \dot{x} , kątowa wokół tego punktu $\dot{\phi}$ oraz deformacje sprężyn równe: $x_1 = z + \phi l_1 - y_1(t)$, $x_2 = z - \phi l_2 - y_2(t)$. Tak więc wyrażenie na energię będą

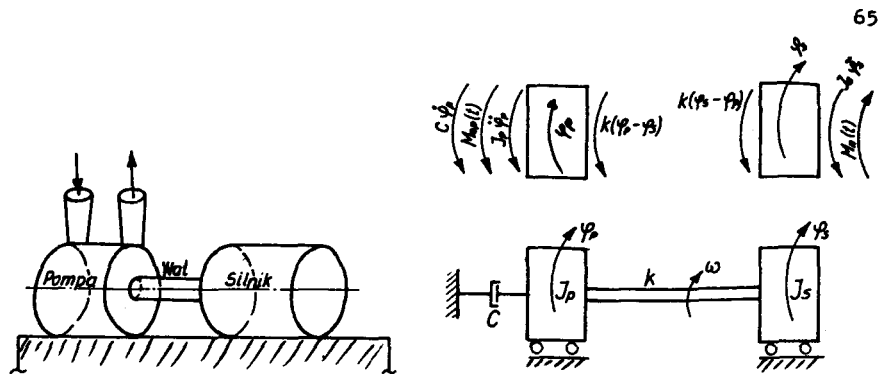
$$T = \frac{1}{2} M \dot{z}^2 + \frac{1}{2} I_c \dot{\phi}^2, V = \frac{1}{2} k_1 (z + \phi l_1 - y_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (z - \phi l_2 - y_2)^2 \quad (5.7)$$

Po zastosowaniu równań Lagrange'a otrzymamy równania ruchu w postaci [19]:

$$\begin{aligned} M \ddot{z} + (k_1 + k_2) z + (k_2 l_2 - k_1 l_1) \phi &= k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t), \\ I_c \ddot{\phi} + (k_2 l_2 - k_1 l_1) z + (k_1 l_1^2 - k_2 l_2^2) \phi &= k_2 l_2 y_2(t) - k_1 l_1 y_1(t) \end{aligned} \quad (5.8)$$

które jak widać są liniowe z sprzężeniem typu sprężystego.

Na zakończenie weźmy przykład agregatu silnika elektrycznego - pompa i rozważmy jego drgania skrętne. Niech momenty bezwładności wirników będą: pompy I_p , silnika I_s , zaś sprężystość skrętna wału k . Uwzględnimy ponadto moment: napędowy $M_n(t)$ i



Rys.5.5. Agregat pompowy i jego model fizyczny

Układy tego typu mające swobodę ruchu w jednej współrzędnej (tutaj obrót całości) noszą nazwę układów półokreślonych, gdyż jak łatwo sprawdzić ich pierwsza częstość własna jest zerowa.

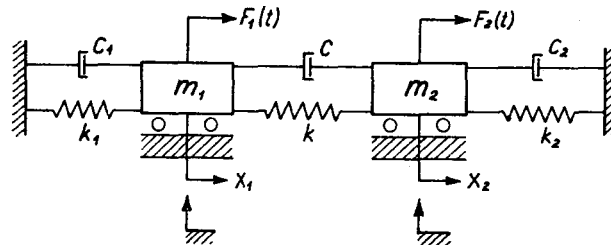
Jest to cechą charakterystyczną wszystkich linii napędowych maszyn

[patrz np. 21] oraz pojazdów, jeśli rozważymy drgania w kierunku ruchu (pociąg, rakieta, itp.).

5.2. CZĘSTOŚCI WŁASNE I POSTACIE DRGAŃ WŁASNYCH UKŁADU O DSS

Wyżej przedstawiliśmy zasadnicze problemy modelowania układów o dwu stopniach swobody. Podkreśliliśmy także, że w ramach układów liniowych istnieje prosta transformacja między układami o sprzężeniu bezwładnościowym (5.4, 5.5) i sprężystym (5.8, 5.9). Możemy wobec tego dalej dokonać analizy własności układów o DSS na przykładzie układów o sprzężeniu sprężystym.

Ogólny typ układu o DSS i sprzężeniu sprężystym przedstawiono na rysunku 5.6.



Rys.5.6. Model układu o DSS z tłumieniem

Równania ruchu modelu napisane na podstawie zasady d'Alemberta są następujące:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 + k(x_1 - x_2) &= F_1(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 x_2 + k(x_2 - x_1) &= F_2(t) . \end{aligned} \quad (5.10)$$

Weźmy najpierw pod uwagę drgania swobodne $F_1(t) \equiv F_2(t) \equiv \mathbf{0}$, bez tłumienia $c_1 = c_2 = c = \mathbf{0}$, gdyż można podejrzewać, że wpływ tłumienia na układ o DSS nie będzie jakościowo różny niż dla układu o JSS. W takim razie nasze wyjściowe równanie ruchu będzie:

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k(x_1 - x_2) = 0 ,$$

$$\begin{aligned} (k_1 + k - m_1 \omega^2) A_1 - k A_2 &= 0 \\ -k A_1 + (k_2 + k - m_2 \omega^2) A_2 &= 0 . \end{aligned} \quad (5.13)$$

Z algebry wyższej wiadomo, że rozwiązania niezerowe (5.13) tzn. $A_1, A_2 \neq 0$ będą jedynie wtedy, gdy zerować się będzie wyznacznik układu, czyli:

$$\begin{vmatrix} k_1 + k - m_1 \omega^2, & -k \\ -k & k_2 + k - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = \begin{aligned} &= a \omega^4 + b \omega^2 + c = 0 , \\ &= m_1 m_2 \omega^4 - \omega^2 [(k_1 + k)m_2 + (k_2 + k)m_1] + \\ &+ k_1 k_2 + k_2 \cdot k + k \cdot k_1 = 0 . \end{aligned} \quad (5.14)$$

Tym samym otrzymaliśmy równanie na wyznaczenie dwu częstości drgań własnych, ω_1^2, ω_2^2 , z którymi mogą zachodzić drgania swobodne układu o DSS. Zwróćmy uwagę, że wyznacznik (5.14), a więc i równanie częstości, tworzą jedynie parametry masowosprężyste. Tak więc częstości ω_1 i ω_2 , zależą jedynie od rozkładu i wartości mas i sprężystości: m_1, m_2, k_1, k_2, k .

Każda z częstości własnych ω_1, ω_2 , określa ruch elementarny układu (harmoniczny o tej częstości), wobec tego ruch ogólny układu o DSS musi być syntezą dopuszczalnych ruchów elementarnych, czyli syntezą cząstkowych drgań własnych. Tak więc rozwiązanie równań ruchu (5.11) można wyrazić w postaci:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_{11} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_2) , \\ x_2 &= A_{21} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{22} \sin(\omega_2 t + \varphi_2) . \end{aligned} \quad (5.15)$$

Zauważmy przy tym, że pierwszy wskaźnik w amplitudzie A_{ij} oznacza numer współrzędnej a drugi numer częstości własnej. Jeśli popatrzymy na proponowane rozwiązanie (5.15) poprzez pryzmat warunków początkowych równania (5.11), gdzie mamy dane $x_1(0), \dot{x}_1(0), x_2(0), \dot{x}_2(0)$, to (5.15) zawiera o dwie niewiadome za dużo. Wróćmy zatem do niewykorzystanego w pełni układu

równań algebraicznych (5.13). Podstawiając do niego wiadomą już wartość pierwszej częstości własnej ω_1 możemy znaleźć:

$$\begin{aligned}(k_1+k - m_1 \omega_1^2) A_{11} - k A_{21} &= 0, \\ - k A_{11} + (k_2+k - m_2 \omega_1^2) A_{21} &= 0,\end{aligned}$$

co daje:

$$\frac{A_{21}}{A_{11}} = \frac{k_1+k - m_1 \omega_1^2}{k} = \frac{k}{k_2+k-m_2 \omega_1^2} = \mu_1. \quad (5.16)$$

Podstawienie zaś ω_2 do (5.13) pozwala znaleźć:

$$\frac{A_{22}}{A_{12}} = \frac{k_1+k-m_1 \omega_2^2}{k} = \frac{k}{k_2+k-m_2 \omega_2^2} = \mu_2. \quad (5.17)$$

Tak więc zamiast (5.15) można w końcu napisać:

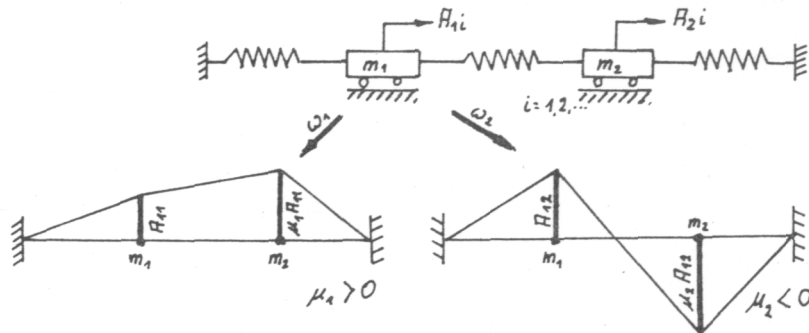
$$\begin{aligned}x_1 &= A_{11} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \\ x_2 &= \mu_1 A_{11} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \mu_2 A_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_2),\end{aligned} \quad (5.18)$$

co jak widać jest rozwiązaniem w pełni określonym, gdyż A_{11} , A_{12} , ϕ_1 , ϕ_2 wyznaczymy z czterech znanych warunków początkowych. Wróćmy jednak do ilorazów (5.17) i (5.18), czyli μ_1 , μ_2 . Określają one relację jaka musi być zachowania między amplitudami mas m_1 i m_2 podczas drgań elementarnych z częstością ω_1 (μ_1), bądź częstością ω_2 (μ_2). Stąd też mówi się, że μ_1 i μ_2 , określają postać drgań własnych układu, czyli dozwolone stosunki amplitudalne. Dla układu o JSS mieliśmy jedynie dozwoloną częstość drgań w postaci częstości własnej ω_0 . Tutaj zaś mamy dwie dozwolone częstości drgań ω_1 , ω_2 , zwane częstościami własnymi i związane z tym dwa dozwolone stosunki amplitudowe μ_1 ; μ_2 zwane postaciami własnymi. Tak więc dla określenia ruchu własnego układu o DSS należy podać częstości i odpowiadające im postacie własne (ω_1 ; μ_1) oraz (ω_2 ; μ_2). Analogicznie będzie dla układów o większej liczbie stopni swobody.

Sytuację powyższą ilustruje rysunek 5.7, skąd można zauważyć, że druga postać własna wymaga zmiany fazy drgań o 180° , $\mu_2 < 0$, tzn. masy m_1 i m_2 drgają w przeciwfazie.

Mówiąc o postaciach własnych nie można pominąć jeszcze jednej ich własności, a mianowicie ich wzajemnej ortogonalności (prostokątności), którą łatwo wyprowadzić z zasady wzajemności sił i pomieszczeń [16]. Dla n stopnia swobody własność tę można zapisać następująco:

$$\sum_{i=1}^n m_i A_{ir} A_{is} = 0, \quad \text{gdy } r \neq s, \quad (5.19)$$



Rys.5.7. Graficzna ilustracja postaci własnych układu o DSS, (wysokość słupka nad masą równa się amplitudzie drgań)

$$\sum_{i=1}^n m_i A_{ir}^2 = M > 0, \quad r=1, \dots, n. \quad (5.20)$$

Czytelnik z pewnością rozpisze tę własność dla dwu stopni swobody.

Kończąc zagadnienie drgań swobodnych układu o DSS należy dodać jeszcze słowo o tłumieniu.

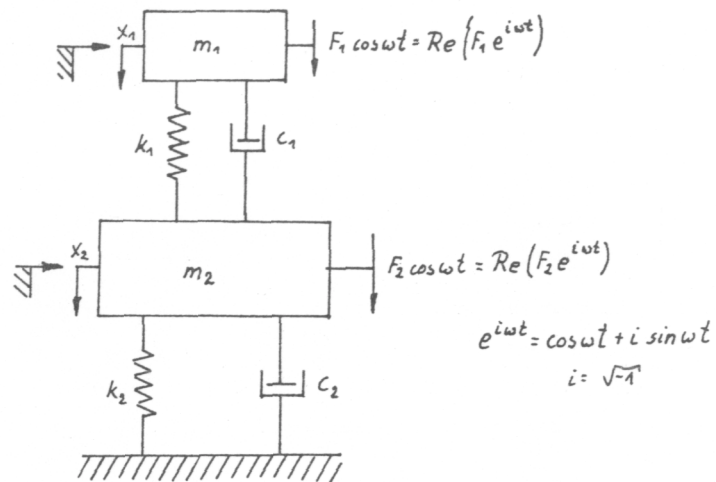
Jego wpływ jakościowy jest taki sam jak dla JSS, stąd też dla $F_1(t) = F_2(t) = \mathbf{0}$ rozwiązania równań (5.10) można napisać przez analogię:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11} e^{-h_1 t} \sin(\omega_1^* t + \varphi_1) + c_{12} e^{-h_2 t} \sin(\omega_2^* t + \varphi_2), \\ x_2 &= c_{21} e^{-h_1 t} \sin(\omega_1^* t + \varphi_1) + c_{22} e^{-h_2 t} \sin(\omega_2^* t - \varphi_2). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Jak widać zjawiają się tu wykładniki tłumienia h_1, h_2 , częstości drgań własnych tłumionych ω_1^*, ω_2^* i również postacie własne. Wielkości te wyrażają się jednak w skomplikowany sposób przez parametry układu, stąd też nie warto dalej się tu w to zagłębiać. Zainteresowanym można polecić bogatą literaturę [5, 12, 18, 22, 23, 24].

5.3. DRGANIA WYMUSZONE MODELU O DSS

Dla każdego z obiektów zmodelowanych w punkcie 5.1 do DSS niezbędna jest znajomość drgań



Rys.5.8. Model o dwóch stopniach swobody do analizy drgań wymuszonych siłami harmonicznymi zmiennymi

Jak widać z rysunku zastosowano tu wzór Eulera przedstawienia funkcji trygonometrycznych. Takie podejście ułatwia niewspółmiernie rachunek, należy jednak pamiętać, by na końcu obliczeń zastosować oczywiste rozumowanie:

$$\text{jeśli wymuszenie } F(t) = F \cos \omega t = \operatorname{Re}(F e^{i\omega t}),$$

$$\text{to odpowiedź } x(t) = \operatorname{Re}[\underline{x}(t)].$$

Tak więc stosując postać zespoloną wymuszenia dogodną rachunkowo należy na końcu przejść do dziedziny rzeczywistej wg podanej wyżej zasady. Równania ruchu układu z rysunku 5.8 mają postać:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1(x_1 - x_2) &= F_1 e^{i\omega t}, \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_1(x_2 - x_1) + c_2 \dot{x}_2 + k_2 x_2 &= F_2 e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Rozpatrując drgania wymuszone ustalone (po wygaśnięciu drgań swobodnych spowodowanych włączeniem wymuszenia) możemy przyjąć:

$$\begin{aligned}
 -m_1 \omega^2 \underline{x}_1 + c_1 i \omega (\underline{x}_1 - \underline{x}_2) + k_1 (\underline{x}_1 - \underline{x}_2) &= F_1 \\
 -m_2 \omega^2 \underline{x}_2 + c_1 i \omega (\underline{x}_2 - \underline{x}_1) + c_2 i \omega \underline{x}_2 + k_1 (\underline{x}_2 - \underline{x}_1) + k_2 \underline{x}_2 &= F_2
 \end{aligned}
 \tag{5.23}$$

a w postaci macierzowej :

$$-\omega^2 \underline{M} \underline{X} + i \omega \underline{C} \underline{X} + \underline{K} \underline{X} = \underline{F}
 \tag{5.24}$$

gdzie:

$$\underline{X} = \begin{Bmatrix} \underline{X}_1 \\ \underline{X}_2 \end{Bmatrix}, \quad M = \begin{Bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{Bmatrix}, \quad C = \begin{Bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{Bmatrix}$$

$$K = \begin{Bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{Bmatrix}, \quad F = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

gdzie \underline{X} jest wektorem amplitud drgań, F - wektorem wymuszeń, M , K , C to macierze bezwładności, sztywności i tłumienia. Jeśli oznaczymy macierz sumaryczną przez D :

$$D = -\omega^2 M + i\omega C + K$$

i nazwiemy ją macierzą dynamiczną układu, to równanie (5.24) przyjmie ostateczną postać:

$$D \underline{X} = F \quad (5.25)$$

Z algebry macierzy otrzymujemy rozwiązanie postaci:

$$\underline{X} = D^{-1} F = H(i\omega) F \quad (5.26)$$

czyli:

$$\underline{X}_1 = \frac{1}{\det D} \{ \Delta_{11} F_1 + \Delta_{12} F_2 \} = H_{11}(i\omega) F_1 + H_{12}(i\omega) F_2,$$

$$\underline{X}_2 = \frac{1}{\det D} \{ \Delta_{21} F_1 + \Delta_{22} F_2 \} = H_{21}(i\omega) F_1 + H_{22}(i\omega) F_2,$$

gdzie Δ_{ij} są dopełnieniem algebraicznym macierzy D , zaś $H_{ij}(i\omega) = \frac{\Delta_{ij}(i\omega)}{\det D}$

transmitancjami układu.

(Transmitancja $H_{ij}(i\omega)$ to amplituda odpowiedzi w punkcie „j” na jednostkowe wymuszenie harmoniczne w punkcie „i”). W tym przypadku przy wymuszeniu siłowym i odpowiedzi przenieszczeniowej transmitancja nosi nazwę „podatności”.

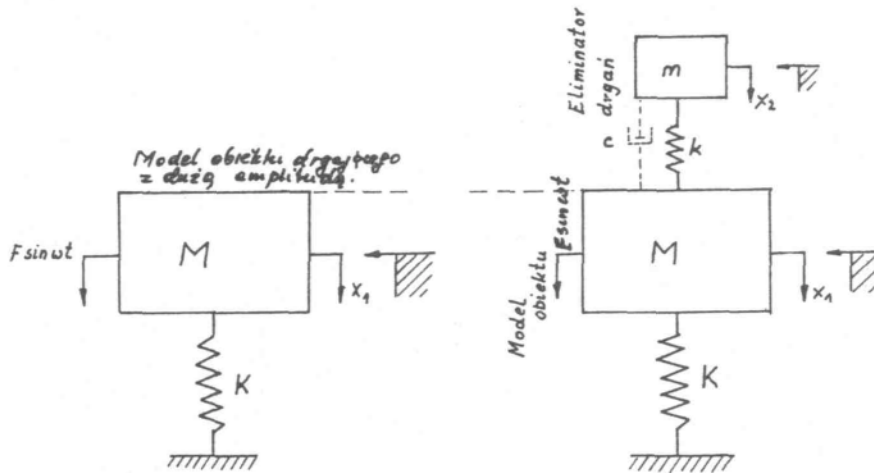
Mimo że nasze rozważania zaczęliśmy od dwu stopni swobody, to wprowadzony zapis wektorowo macierzowy daje możliwość uogólnień na „n” stopni swobody, przy odpowiedniej zamianie rzędu i elementów wektorów i macierzy. W takim razie odpowiedź układu o n stopniach swobody w współrzędnej s-tej może być na podstawie (5.26) wyrażona w postaci:

$$\underline{X}_s = \sum_{j=1}^n H_{sj}(i\omega) F_j \quad (5.27)$$

tzn. amplituda drgań s-tej współrzędnej jest sumą przyczynków od każdej siły wymuszającej.

5.4. ZASTOSOWANIA - ELIMINACJA I IZOLACJA DRGAŃ

W wielu przypadkach inżynierii mechanicznej całe konstrukcje, maszyny, narzędzia, elementy maszynowe wykazują zbyt duże amplitudy drgań wymuszonych, za duże ze względu na trwałość i niezawodność, dokładność, itp. Modelem naszego narzędzia, elementu maszynowego, itp. niech będzie układ o jednym stopniu swobody o parametrach K , M drgający pod wpływem siły wymuszającej $F \sin \omega t$. Podejrzewamy, że dołączenie układu dodatkowego o parametrach k , m może polepszyć sytuację drganiową (rys. 5.9).



Rys.5.9. Poglądowe przedstawienie obiektu mechanicznego z eliminatorem drgań

Dla jasności wykładu pominiemy na razie rolę tłumienia w układzie $h=0$, a układając równania ruchu otrzymamy:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_1 + (k + K) x_1 - kx_2 &= F \sin \omega t, \\ m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Przyjęcie oczywistych rozwiązań:

$$x_1 = A_1 \sin \omega t, \quad x_2 = A_2 \sin \omega t$$

daje:

$$\begin{aligned} A_1 (-M \omega^2 + K + k) - k A_2 &= F, \\ -k A_1 + A_2 (-m \omega^2 + k) &= 0. \end{aligned}$$

W ślad za Den Hartogiem [23] przyjmijmy następujące oznaczenia :

$x_{st} = \frac{F}{K}$ - ugięcie statyczne układu głównego (modelu obiektu),

$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$ - częstość drgań własnych układu dołączonego (eliminatora),

$\Omega_n^2 = \frac{K}{M}$ - częstość drgań własnych układu głównego,

$\mu = \frac{m}{M}$ - stosunek masy eliminatora do obiektu, a po prostych przekształceniach

otrzymamy:

$$\frac{A_2}{x_{st}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)\left(1 + \frac{k}{K} - \frac{\omega^2}{\Omega_n^2}\right) - \frac{k}{K}}, \quad (5.29)$$

$$\frac{A_1}{x_{st}} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)\left(1 + \frac{k}{K} - \frac{\omega^2}{\Omega_n^2}\right) - \frac{k}{K}} = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) \frac{A_2}{x_{st}}.$$

Analizując amplitudy drgań mas w funkcji częstości wymuszenia można powiedzieć, że masa eliminatora A_2 , będzie miała zawsze różną od zera amplitudę drgań (poza przypadkiem granicznym $\omega \rightarrow \infty$). Natomiast masa główna będzie miała zerową amplitudę drgań dla $\omega = \omega_n$, tzn. wtedy gdy eliminator nastrojony będzie swą częstością własną, na częstość wymuszenia. Można pokazać, że w tym przypadku nastrojenia ($\omega = \omega_n$) eliminator oddziałuje na masę główną z siłą równą sile wymuszającej, lecz w przeciwfazie. Następuje więc kompensacja sił i masa układu głównego ma zerową amplitudę drgań wymuszonych. Eliminators ten nosi nazwę dynamicznego, gdyż jedynym jego warunkiem pracy jest $\omega_n = \omega$, czyli: "częstość własna eliminatora = częstości wymuszenia".

Nadmierne amplitudy drgań układu głównego (rys. 5.9a) mogą wystąpić w dwu przypadkach: dla każdego $\omega \in (0, \infty)$ przy potężnej amplitudzie siły wymuszającej oraz dla $\omega = \Omega_n$, tzn. w rezonansie przy małej sile wymuszającej i małym tłumieniu. Ten ostatni przypadek jest znacznie częstszy. Wtedy warunek eliminacji drgań będzie:

$$\omega = \omega_n = \Omega_n,$$

czyli :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (5.30)$$

Do pełnej analizy zachowania się eliminatora dynamicznego należy wziąć pod uwagę wpływ ilorazu masy μ , wpływ tłumienia, itp. Nie mając na to miejsca zainteresowanych odsyłamy do literatury [23, 5, 14], podając jednocześnie główne wnioski z tych badań. Otóż im większe $\mu = \frac{m}{M}$, tym szerszy zakres eliminacji drgań, jednak ze względów oczywistych masa dołączona m jest mniejsza od masy układu głównego M tzn. $\mu < 1$. Wpływ tłumienia na zjawisko eliminacji drgań jest istotny, szczególnie w układzie eliminatora (patrz rys. 5.9 tłumik wrysowany linią przerywaną). Optymalnie dobrane tłumienie likwiduje prawie całkowicie dwa rezonanse na charakterystyce układu o DSS.

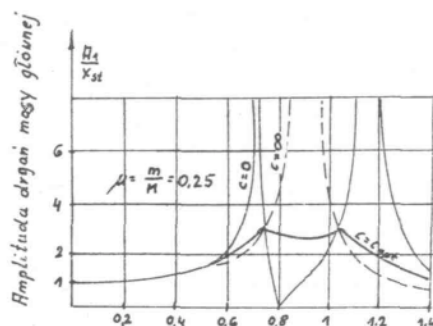
Całe zagadnienie dobrze ilustruje rysunek 5.10 zaczerpnięty od Den Hartoga [23], gdzie podano charakterystyki częstościowe drgań masy głównej $\frac{A_1}{x_{st}} = f(\omega)$ dla trzech przypadków tłumienia:

1° $c = 0$ z widocznym dobrze zerowaniem się amplitudy drgań,

2° $c = c_{opt}$ z doskonale wytłumionymi rezonansami,

3° $c = \infty$, co daje zwarcie masy dużej z małą i układ główny z powiększoną masą do "M+m", widać tu rezonans tego nowego układu niewiele różnego od układu wyjściowego (5.9a).

Wiele przykładów zastosowań i konkretnych konstrukcji dynamicznych eliminatorów drgań można znaleźć w [5,23]. Tutaj warto jedynie wspomnieć, że maszynka do strzyżenia włosów pracuje bez



Rys.5.10. Ilustracja wpływu tłumienia na zjawisko eliminacji drgań w eliminatorze dynamicznym wg Den Hartoga [23]

szarpania dzięki eliminatorowi; przypomnieć, że w każdym sprzęgle pojazdu znajduje się eliminator drgań, a także wskazać, że eliminator to nie tylko masa i sprężyna, to także może być wahadło, kulka we wgłębieniu itp. Te ostatnie typy eliminatora dynamicznego znajdują szczególne zastosowanie w likwidacji drgań wału korbowego silników spalinowych, przy czym dzięki wykorzystaniu siły odśrodkowej daje się je nastroić na harmoniczne częstości obrotowej.

Na zakończenie zagadnień eliminacji drgań warto wspomnieć o innym rodzaju eliminatorów tzw. rezonansowych, które jedynie są skuteczne w rezonansie układu głównego ($\omega = \Omega_n$), odmiennie niż dla eliminatora dynamicznego. Jego ogólny schemat dynamiczny i charakterystykę przedstawiono na rysunku 5.11.

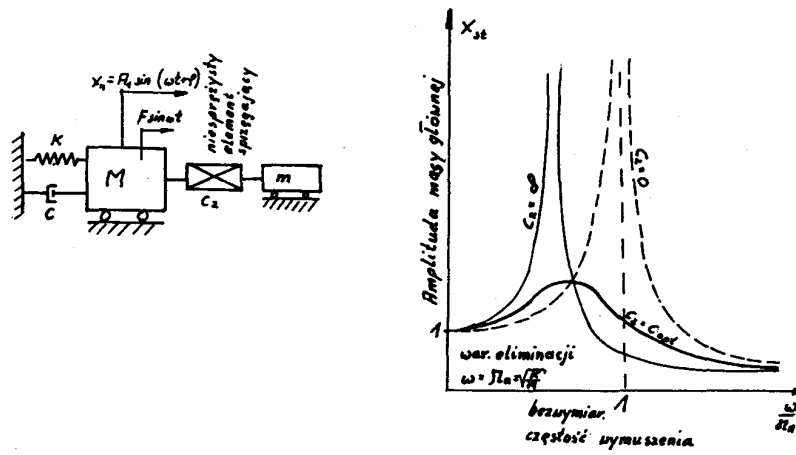
Tajemniczy niesprężysty element sprzęgający z rysunku 5.11 o zastępczej wartości tłumienia C_z , może być zwykłym tłumikiem olejowym, tłumikiem ciernym (nieliniowym), a nawet może mieć postać zespołu mas dodatkowych pracujących uderzeniowo (rys. 5.12).

Dla zainteresowanych tą tematyką można polecić pracę doktorską Z.Golca [25].

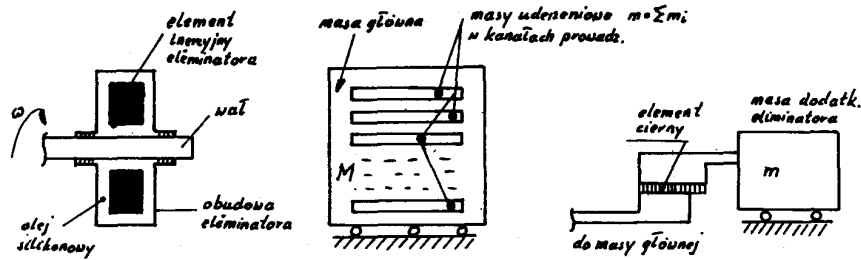
Zastosowanie układów o DSS to również zagadnienie wibroizolacji maszyn poruszone już w p. 4.4 przy układach o JSS. Jeśli na rysunku 5.8 pominiemy dla prostoty tłumienie, a wymuszenie zachowamy jedynie przy masie m_1 , to będzie to przypadek maszyny (m_1) jako źródła wymuszenia (F_1) posadowionej na wibroizolatorze (k_1, k_2) z masą pośrednią (m_2), (patrz rys. 5.13).

Napisanie równań ruchu i ich rozwiązanie dla x_1, x_2 , a następnie obliczenie siły przekazywanej na podłoże $R = k_2 x_2$ pozostawimy czytelnikowi.

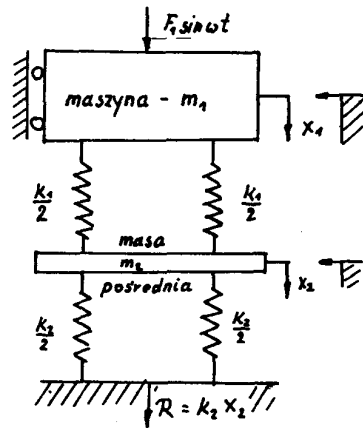
Tutaj jedynie wypunktujemy najważniejsze wnioski w porównaniu z wibroizolacją w układzie o JSS (patrz p. 4.4). Tam w układzie mieliśmy jeden rezonans, tutaj dwa (dwie masy, dwa stopnie swobody, dwie częstości własne -



Rys.5.11. Ogólny schemat eliminatora rezonansowego i jego charakterystyka dla trzech wartości tłumienia zastępczego $c_2 = 0$, $c_{opt} = 0, \infty$, [23]



Rys.5.12. Trzy najważniejsze typy eliminatorów rezonansowych: wiskotyczny, uderzeniowy oraz cierny

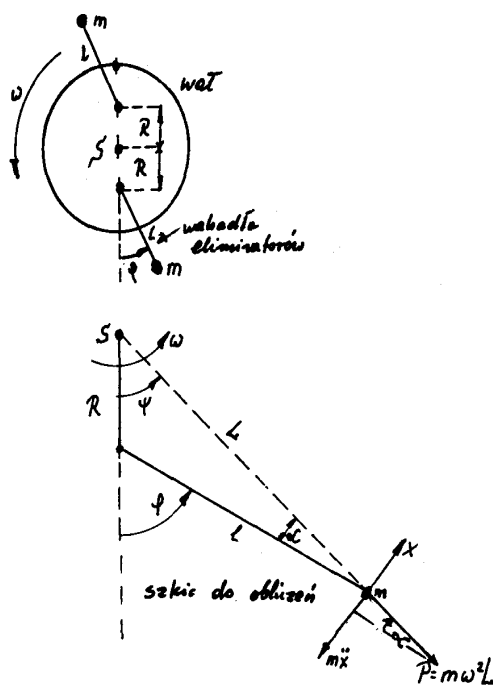


Rys.5.13. Model maszyny z wibroizolatorem z masą pośrednią (np. rama montażowa agregatu)

- rezonansowe). Podobnie więc po minięciu strefy rezonansu wystąpi strefa wibroizolacji. Dla układu o JSS w mianowniku mieliśmy kwadrat częstości (ω^2), tutaj mamy jej czwartą potęgę (ω^4). Stąd jest wniosek, że w miarę wzrostu częstości i w strefie wibroizolacji jej efektywność jest większa dla układu z masą pośrednią ($\frac{1}{\omega^4}$) niż dla układu o JSS ($\frac{1}{\omega^2}$). Tak więc tam gdzie jest możliwe stosowanie masy pośredniej, będziemy ją zalecać dla zwiększenia efektywności wibroizolacji.

Przykład. Dla eliminacji drgań skrętnych wału korbowego, wymuszonych częstością drugiej harmonicznej odpaleń cylindrów ω w całym zakresie obrotów, postanowiono zamontować w miejscu maksymalnych drgań skrętnych dwa symetryczne eliminatory wahadłowe. Znaleźć ich parametry.

Rozwiązanie:



Rys.5,14. Szkic do obliczeń eliminatorów drgań skrętnych wału korbowego silnika spalinowego

Zakładamy, że układ jest symetryczny, a znając warunek nastrojenia eliminatorów $2\omega = \Omega_n$, (druga harmoniczna), trzeba jedynie znaleźć częstość własną Ω_n , wahadła w polu sił odśrodkowych spowodowanych obrotem wału z prędkością kątową ω . Na masę m w takim ruchu działa siła odśrodkowa F wzdłuż L , siła Coriolisa z tytułu ruchu względnego równa $2\phi \dot{x}$ wzdłuż i oraz siła bezwładności, z tytułu ruchu na ramieniu l . Biorąc ich rzuty na kierunek ruchu masy mamy:

$$m \ddot{x} + m \omega^2 L \sin \alpha = 0,$$

$$\text{ale : } \sin \alpha = \frac{R}{l} \sin \psi \cong \frac{R}{l} \psi,$$

zaś ψ dla małych kątów można wyrazić jako $\psi = \frac{x}{L}$.

Wobec tego po podstawieniu :

$$m \ddot{x} + m \omega^2 L \frac{R}{l} \psi = 0,$$

$$m \ddot{x} + \frac{m \omega^2 L R}{l} \frac{x}{L} = 0,$$

$$\ddot{x} + \omega^2 \frac{R}{l} x = 0,$$

$$\ddot{x} + \Omega_n^2 x = 0,$$

skąd :

$$\Omega_n = \omega \sqrt{\frac{R}{l}}.$$

Tak więc strojenie eliminatora polega na doborze R oraz l tak, by $\sqrt{R/l} = 2$.