

ZAKŁAD WIBROAKUSTYKI I BIODYNAMIKI SYSTEMÓW  
LABORATORIUM DYNAMIKI MASZYN  
POLITECHNIKI POZNAŃSKIEJ

INSTRUKCJA DO ĆWICZENIA

**Reakcje dynamiczne  
stałej osi obrotów brył sztywnych**

Poznań 2002

Opracował:  
DARIUSZ ZASTROŻNY

CEL ĆWICZENIA

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie reakcji dynamicznych, występujących w łożyskach specjalnego urządzenia. Student wykonujący ćwiczenie może obserwować zjawiska wywołane niewyrównoważeniem statycznym, momentowym i dynamicznym. Ćwiczenie jest ilustracją odpowiedniego tematu ujętego w programie wykładów mechaniki ogólnej i zarazem jest wprowadzeniem w bardzo ważną w technice problematykę, z którą student będzie miał do czynienia w toku dalszych studiów.

WYPOSAŻENIE STANOWISKA

1. Specjalny przyrząd, opisany w dalszej części instrukcji (str.18)
2. Zasilacz
3. Wzmacniacz dla mostka tensometrycznego
4. Przetwornik analogowo-cyfrowy dokonujący konwersji sygnału analogowego na jego postać cyfrową
5. Komputer klasy PC, który jest wyposażony w odpowiedni program komputerowy „REDYSK” do wyznaczania reakcji
6. Cimetr wraz z czujnikiem
7. Dynanometr
8. Klucz do nakrętek

LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

Wiadomości ogólne, potrzebne do zrozumienia przebiegu ćwiczenia, dotyczą przede wszystkim, dynamiki ciała sztywnego posiadającego stałą oś obrotu. Lektura podstawowa to podręcznik mechaniki ogólnej. Oto kilka pozycji do wyboru:

1. Leyko J. „MECHANIKA OGÓLNA” tom II Dynamika. Rozdział VII,VIII,IX. Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa 1997
2. Łunc M., Szaniawski A. „ZARYS MECHANIKI OGÓLNEJ” Rozdział 15.1- 15..3, 21.2
3. Zarankiewicz K. „MECHANIKA TEORETYCZNA”, tom III, rozdział X,XII  
Zawadzki j., Siuta W. , „MECHANIKA OGÓLNA”, część III, Rozdział 1.2, 3.1 – 3.7, 5.6

W przypadku niewyrównoważenia i związanych z nimi zagadnień:

1. Cempel Cz. „DRGANIA MECHANICZNE” WWP Poznań 1982
2. Łączkowski R. „WYWAŻANIE ELEMENTÓW WIRUJĄCYCH” WNT, Warszawa 1979.

ZAGADNIENIA KONTROLNE

1. Pojęcia: moment bezwładności, moment dewiacji, główne centralne osie bezwładności
2. Równanie dynamiczne ruchu obrotowego
3. Pojęcie niewyrównoważenia oraz związane z tym zjawiska
4. Typy niewyrównoważeń:
  - statyczne
  - dynamiczne
  - momentowe

PODSTAWY TEORETYCZNE

***Zjawiska wywołane niewyrównoważeniem – reakcje stałej osi obrotu.***

Dane jest ciało sztywne o masie  $M$ , osadzone na stałej osi obrotu, przy czym punkty  $A$  i  $B$  są łożyskami (rys.1). Ciało to poddano działaniu układu zewnętrznych sił:  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  ogólnym przypadku, ciało może być w ruchu obrotowym zmiennym.

Nieznane reakcje łożysk zapiszemy analitycznie

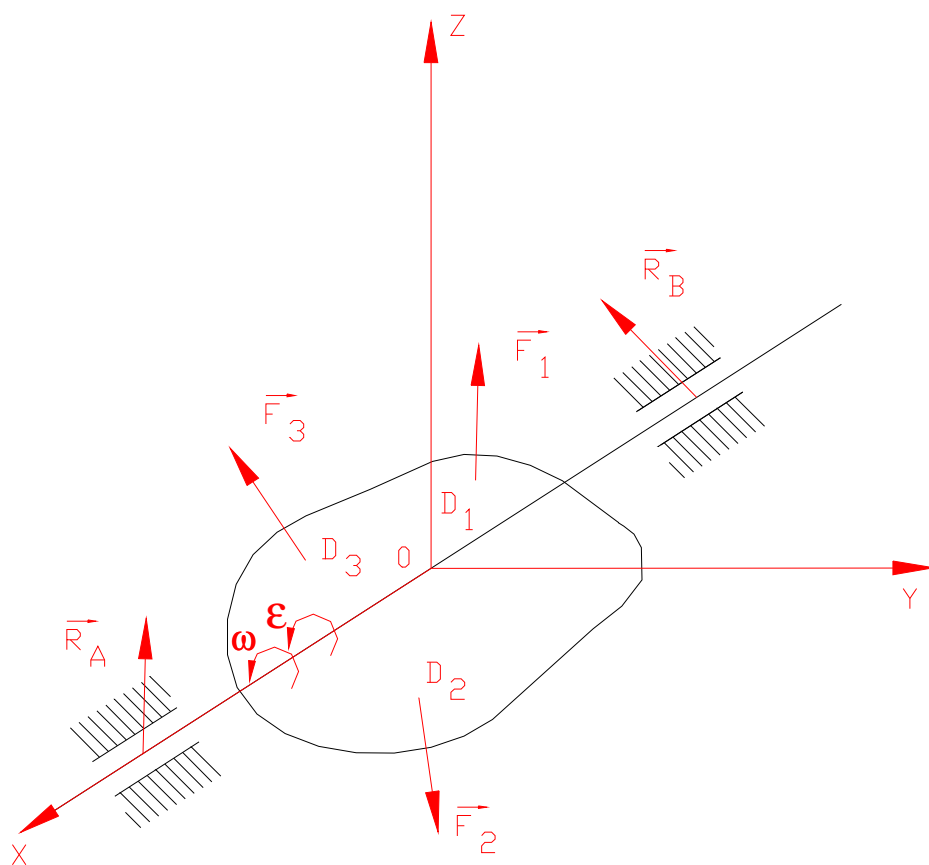
$$\vec{R}_A = X_A \vec{i} + Y_A \vec{j} + Z_A \vec{k}, \quad (1)$$

$$\vec{R}_B = X_B \vec{i} + Y_B \vec{j} + Z_B \vec{k}, \quad (2)$$

gdzie:  $X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B, Z_B$  to nieznane składowe, a  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  - wersory.

Wartości i kierunki reakcji łożysk zależą bezpośrednio od działania układu sił czynnych  $\vec{F}_i$ . (reakcje statyczne) oraz są konsekwencją ruchu obrotowego ciała (reakcje dynamiczne). Opierając się na zasadzie d'Alembert-a, można napisać równania, pozwalające obliczyć składowe poprzeczne do osi obrotu (oś  $x$ ):

$$Y_A, Z_A, Y_B, Z_B.$$



Rys.1 Ciało sztywne o masie  $m$ , osadzone na stałej osi obrotu [instr.do ćw.1980]

Tutaj przeanalizujemy zagadnienie nieco inaczej, a mianowicie wykonamy najpierw redukcję sił bezwładności (sił d'Alemberta) przyjmując jako biegun redukcji O, początek układu współrzędnych, przy czym płaszczyznę (yOz) przesuwamy przez środek masy ciała C o współrzędnych  $(O, y_C, z_C)$ : (rys. 2). Zredukujemy osobno składowe odśrodkowe (odosiowe), a potem składowe styczne sił bezwładności [instr.do ćw.1980].

Siły odśrodkowe cząstek ciała o masach  $m_i$  i o współrzędnych  $(x_i, y_i, z_i)$ , mają tylko składowe w kierunkach osi y i osi z.

Tymi składowymi są:

$$m_i r_i \omega^2 \cos(r_i, y) = m_i y_i \omega^2 \quad (3)$$

$$m_i r_i \omega^2 \cos(r_i, z) = m_i z_i \omega^2 \quad (4)$$

Ich momenty względem osi x są następujące:

$$- m_i y_i \omega^2 z_i \quad m_i z_i \omega^2 y_i \quad (5)$$

a więc, ich suma jest równa zero.

Ich momenty względem osi y wynoszą odpowiednio:

$$O, \\ - m_i z_i \omega^2 x_i \quad (6)$$

zaś względem osi z:

$$m_i y_i \omega^2 x_i, \\ O. \quad (7)$$

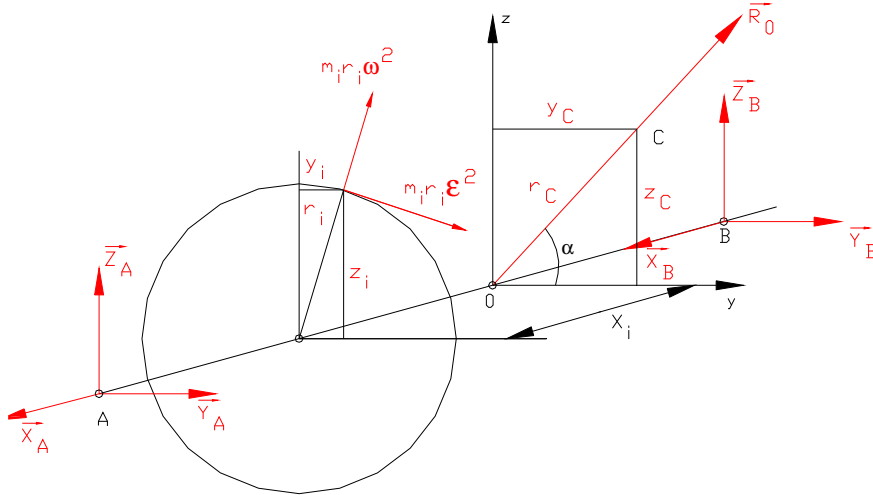
Po zsumowaniu tych wielkości dla wszystkich punktów ciała otrzymujemy:

$$Y_O = \sum m_i y_i \omega^2 = \omega^2 \sum m_i y_i = \omega^2 m y_C \quad (8)$$

$$Z_O = \sum m_i z_i \omega^2 = \omega^2 \sum m_i z_i = \omega^2 m z_C \quad (9)$$

$m = \sum m_i$  jest masą całego ciała.

$$\left. \begin{array}{l} \sum m_i y_i = m y_C \\ \sum m_i z_i = m z_C \end{array} \right\} \text{znane wzory określające położenie środka masy} \quad (10)$$



Rys.2 Składowe odśrodkowe i składowe styczne sił bezwładności [instr.do ćw.1980]

$$\vec{R}_O = X_O \vec{i} + Y_O \vec{j} + Z_O \vec{k}, \quad (11)$$

jest wektorem głównym (sumą ogólną) układu sił odśrodkowych (Składowa  $X_O = 0$ ).

Dalej mamy:

Moment główny (moment ogólny) względem osi y:

$$M_Y = - \sum m_i x_i z_i \omega^2 = - \omega^2 \sum m_i x_i z_i = - \omega^2 I_{XZ} \quad (12)$$

a względem osi z:

$$M_Z = \sum m_i y_i x_i \omega^2 = \omega^2 \sum m_i y_i x_i = \omega^2 I_{XY} \quad (13)$$

gdzie  $I_{XY}$ ,  $I_{XZ}$  są znanymi z teorii momentów bezwładności momentami dewiacji.

Moment główny względem bieguna redukcji O jest równy:

$$M_O = M_X \vec{i} + M_Y \vec{j} + M_Z \vec{k}, \quad (14)$$

ale  $M_x = 0$ . Moduł wektora głównego  $\vec{R}_o$  ma wartość:

$$|\vec{R}_o| = \sqrt{Y_o^2 + Z_o^2} = \omega^2 m \sqrt{y_c^2 + z_c^2} = m r_c \omega^2 \quad (15)$$

wektor główny jest nachylony do osi  $y$  pod kątem  $\alpha$ , przy czym:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{z_o}{y_o} = \frac{z_c}{y_c}, \quad (16)$$

co oznacza, że prosta działania siły  $\vec{R}_o$  przechodzi przez środek masy  $C$  ciała i ma wartość taką, jak gdyby cała masa ciała była skupiona w tym środku. Nie wynika z tego, że układ sił odśrodkowych, w przypadku ogólnym, posiada wypadkową, albowiem powyższa redukcja daje jeszcze moment główny, któremu możemy przypisać parę sił [instr.do ćw.1980]:

$$|\vec{M}_o| = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \omega^2 \sqrt{I_{xy}^2 + I_{xz}^2}. \quad (17)$$

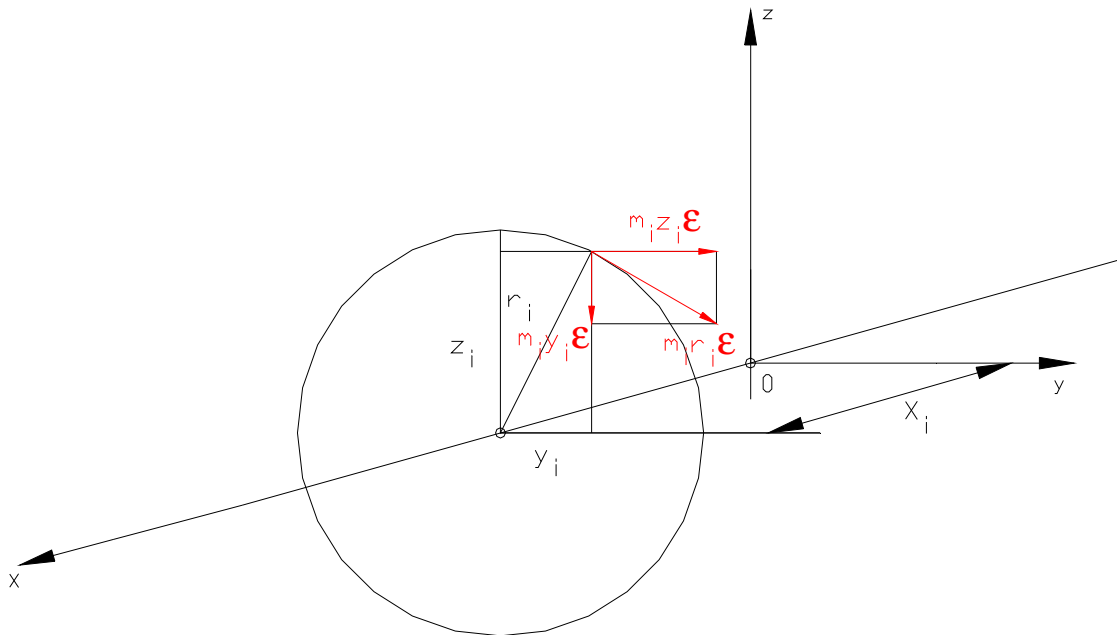
W ogólnym przypadku siły odśrodkowe sprowadzają się do jednej siły  $\vec{R}_o$  i jednej pary sił o momencie  $\vec{M}_o$ , przy czym siła  $\vec{R}_o$  nie leży w tej samej płaszczyźnie co para sił. Zgodnie z twierdzeniem o redukcji dowolnego układu sił działających na ciało sztywne, siły odśrodkowe można dalej sprowadzić, w ogólnym przypadku, do dwu sił skośnych, które obracają się z ciałem, zajmując w nim niezmiennie położenie. Siły te wywołują odpowiednie reakcje dynamiczne w łożyskach.

Rozpatrzmy ważne przypadki szczególne.

Gdy środek masy  $C$  leży na osi obrotu, to  $r_c = 0$ , skąd  $\vec{R}_o = 0$ . Pozostaje para sił o momencie  $\vec{M}_o$

Para ta znika wtedy i tylko wtedy, gdy znikają momenty dewiacji:  $I_{xy} = I_{xz} = 0$ , tzn. gdy oś obrotu (oś  $x$ ) jest główną osią bezwładności. Przy spełnieniu powyższych dwóch warunków, siły odśrodkowe ciała sztywnego, obracającego się dokoła danej osi znoszą się wzajemnie, nie powodując żadnych reakcji osi obrotu, która dlatego nosi nazwę osi

swobodnej. A zatem, osią swobodną jest każda z głównych centralnych osi bezwładności ciała. Wykonajmy teraz redukcję stycznych sił bezwładności występujących podczas obrotów niejednostajnych z przyspieszeniem kątowym  $\epsilon$ . (rys.3)



Rys. 3 Redukcja stycznych sił bezwładności [instr.do ćw.1980]

Składowe tych sił są następujące:

- w kierunku osi y  $m_i r_i \epsilon \sin (r_i, y) = m_i z_i \epsilon,$  (19)

- w kierunku osi z  $- m_i r_i \epsilon \cos (r_i, y) = - m_i y_i \epsilon,$  (20)

Momenty względem osi y i osi z są:

$$m_i y_i \epsilon x_i, \quad m_i z_i \epsilon x_i, \tag{21}$$

Sumując powyższe wyrażenia dla wszystkich mas cząstkowych  $m_i$ , otrzymujemy!



$$Y_o = \sum m_i z_i \varepsilon = \varepsilon m z_c \quad (22)$$

$$Z_o = -\sum m_i y_i \varepsilon = -\varepsilon m y_c, \quad (23)$$

$$M_y = \sum m_i x_i y_i \varepsilon = \varepsilon I_{xy}, \quad (24)$$

$$M_z = \sum m_i x_i z_i \varepsilon = \varepsilon I_{xz}, \quad (25)$$

$$M_x = -\sum m_i r_i^2 \varepsilon = -\varepsilon I_x \quad (26)$$

Widać, że gdy  $\varepsilon = 0$ , czyli  $\omega = \text{const}$ , to układ zredukowany stycznych sił bezwładności jest zerowy.

Styczne siły bezwładności różnią się zasadniczo od sił odśrodkowych tym, że występują tylko przy istnieniu sił zewnętrznych  $(\vec{F}_i)$  dających względem osi obrotu moment różny od zera ( $\varepsilon \neq 0$ ), podczas gdy siły odśrodkowe są zależne tylko od prędkości kątowej  $\omega$ . Z równań powyższych widać, że reakcje łożysk odpowiadające stycznym siłom bezwładności są względem ciała również stałe co do wartości i kierunku. Reakcje te obracają się razem z ciałem, mając wartości proporcjonalne do przyspieszenia kątowego  $\omega$ . Tak samo, jak reakcje wywołane siłami odśrodkowymi, również znikają reakcje spowodowane stycznymi siłami bezwładności, gdy oś obrotu przechodzi przez środek masy ( $y_c = z_c = 0$ ) i jest jego główną osią bezwładności ( $I_{xy} = I_{xz} = 0$ ).

### **1. Niewyrównoważenie statyczne**

Niech będzie spełniony warunek znikania momentów dewiacji:  $I_{xy} = I_{xz} = 0$  ale niech  $r_c \neq 0$ . Oznacza to, że oś obrotu ciała jest równoległa do centralnej głównej osi bezwładności i jest przesunięta względem niej o wielkość  $r_c$  (odległość środka masy od osi obrotu). Siły bezwładności redukują się do jednej siły, której prosta działania przechodzi przez środek masy C (rys.4)

$$\vec{B} = m [(\omega^2 y_c + \varepsilon z_c) \vec{j} + (\omega^2 z_c - \varepsilon y_c) \vec{k}] \quad (27)$$

$$|\vec{B}| = m r_c \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \quad (28)$$

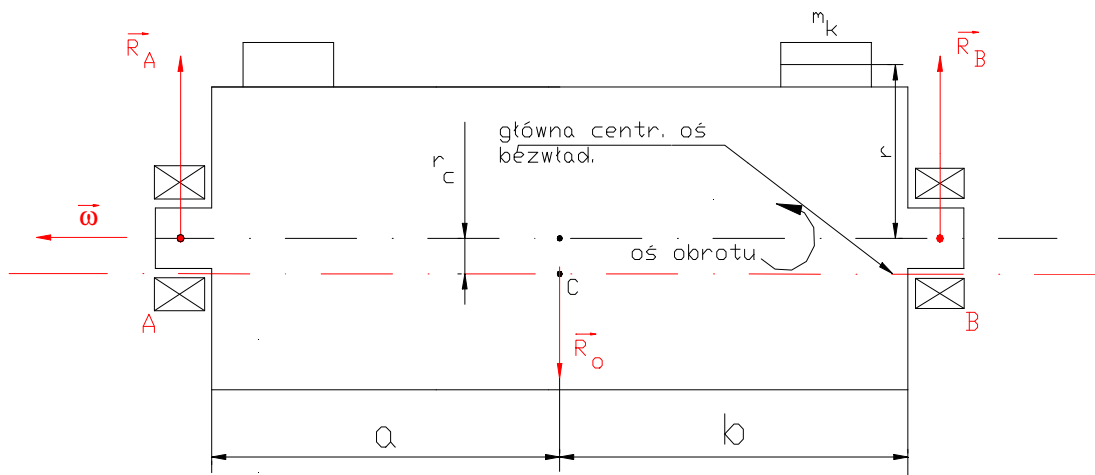
Reakcje w łożyskach A i B są dwiema siłami równoległymi, zgodnie zwróconymi i prostopadłymi do osi obrotu.

$$[\vec{R}_A] = \frac{b}{a + b} |\vec{B}| \quad (29)$$

$$[\vec{R}_B] = \frac{a}{a + b} |\vec{B}| \quad (30)$$

W tym przypadku, ciało wyważa się przez dodanie, po przeciwnej stronie osi obrotu, masy korekcyjnej  $m_K$ , tak aby była spełniona zależność:

$$m_K r = m r_C \quad (31)$$



Rys.4 Schemat wirnika niewyrównoważonego statycznie [C.C.1982]

## 2. Niewyrównoważenie momentowe

Powstaje wtedy, gdy naddatki masy rozłożone są symetrycznie i przemiennie względem środka masy  $s$ . Wtedy główna oś bezwładności przecina oś obrotu w środku ciężkości, a reakcje łożysk są równe i przeciwnego znaku. Innymi słowy, wirująca para sił daje reakcje łożysk będące w przeciwfazie ( $\varphi=180^\circ$ ). Drgania mierzone na obudowach łożysk różniące się w fazie o  $180^\circ$  pozwalają łatwo odróżnić niewyważenie momentowe od statycznego.

Środek masy  $C$  ciała leży na osi obrotu ( $r_C = 0$ ), lecz ta oś nie jest główną osią bezwładności, tzn., nie znikają momenty dewiacji  $I_{xy}$  i  $I_{xz}$ . Główny moment sił bezwładności ma postać:

$$\vec{M} = (-\omega^2 I_{xz} + \varepsilon I_{xy}) \vec{j} + (\omega^2 I_{xy} + \varepsilon I_{xz}) \vec{k} \quad (32)$$

$$|\vec{M}| = \sqrt{(\omega^4 + \varepsilon^2)(I_{xy}^2 + I_{xz}^2)}. \quad (33)$$

Reakcje w łożyskach A i B - to para sił o tym samym co do wielkości momencie, lecz o przeciwnym zwrocie (rys.3.2.2.1).

$$|\vec{R}_A| = |\vec{R}_B| = \frac{|\vec{M}|}{a+b}. \quad (34)$$

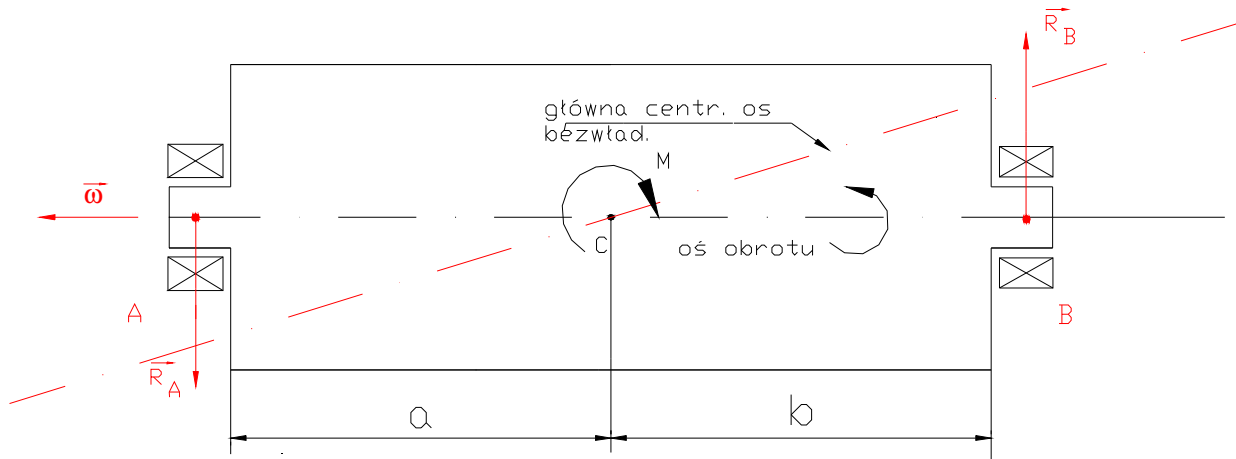
W danym przypadku, ciało wyważa się przez dodanie dwu mas:  $m_1$  i  $m_2$  w ten sposób, aby były spełnione równości:

$$m_1 z_1 = \frac{I_{xz}}{x_2 - x_1}, \quad m_1 y_1 = \frac{I_{xy}}{x_2 - x_1}, \quad (35)$$

$$m_2 z_2 = \frac{I_{xz}}{x_1 - x_2}, \quad m_2 y_2 = \frac{I_{xy}}{x_1 - x_2}, \quad (36)$$

gdzie:

$x_1, y_1, z_1$  oraz  $x_2, y_2, z_2$  są współrzędnymi środków mas korekcyjnych  $m_1$  i  $m_2$ ;  $(x_2 - x_1) =$  odległość między płaszczyznami, w których umieszczono masy korekcyjne.



Rys.5 Schemat wirnika niewyrównoważonego momentowo [C.C.1982]

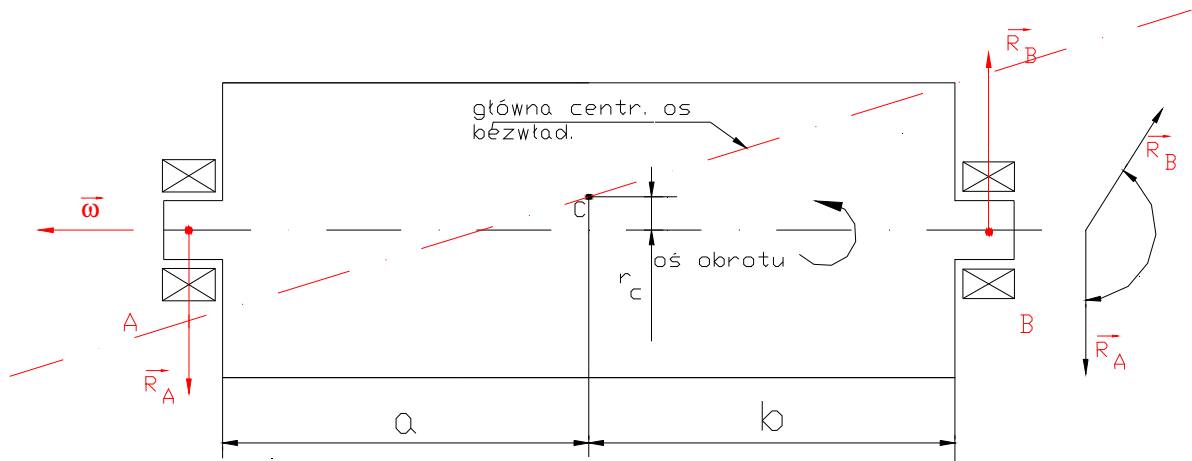
### 3. Niewyrównoważenie dynamiczne

Środek masy ciała nie leży na osi obrotu oraz oś obrotu nie jest główną osią bezwładności. Siły bezwładności redukują się do jednej siły  $\vec{B}$  i jednej pary sił o momencie  $\vec{M}$ . Reakcje w łożyskach A i B są siłami wихrowatymi (nie leżą w jednej płaszczyźnie) prostopadłymi do osi obrotu (rys.6)

W danym przypadku ciało wyważa się dodając dwie masy  $m_1$  i  $m_2$  w ten sposób, aby były spełnione równości:

$$m_1 z_1 = \frac{I_{XZ} - m x_C z_2}{x_2 - x_2}, m_1 y_1 = \frac{I_{XY} - m y_C x_2}{x_2 - x_1}, \quad (37)$$

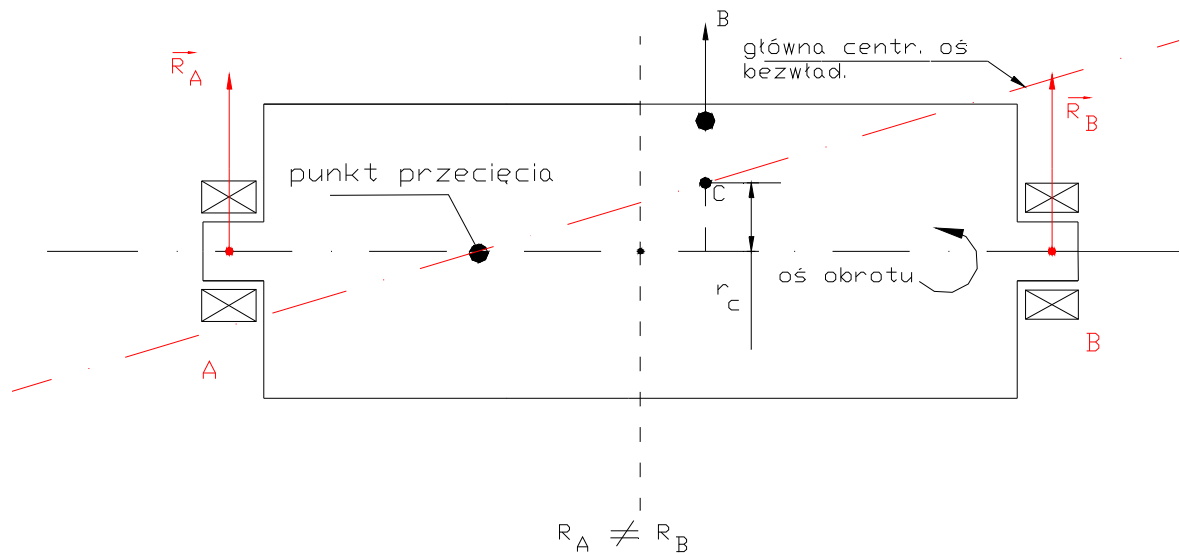
$$m_2 z_2 = \frac{I_{XZ} - m x_C z_1}{x_1 - x_2}, m_2 y_2 = \frac{I_{XY} - m y_C x_1}{x_1 - x_2}, \quad (38)$$



Rys. 6 Schemat wirnika niewyrównoważonego dynamicznie [C.C.1982]

#### 4. Niewyrównoważenie quasistatyczne.

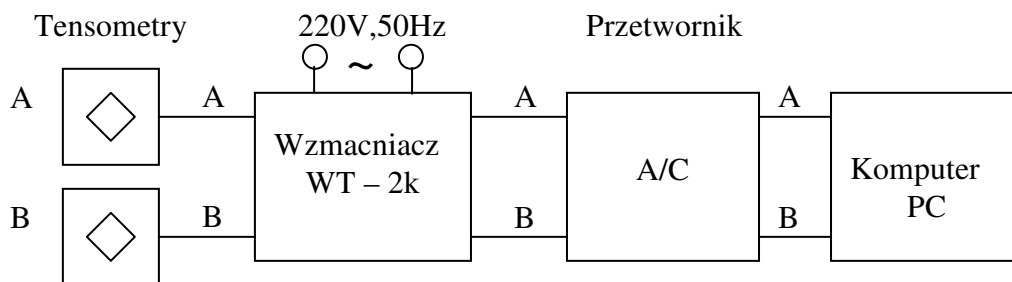
Powstaje wtedy gdy masa niewyważenia leży poza płaszczyzną środka ciężkości. Wtedy główna oś bezwładności wirnika przecina oś obrotu poza środkiem ciężkości, dając niewyważenie właściwe e, oraz nierówne amplitudowe lecz współfazowe reakcje (drżania) łożysk A i B (rys. 7)



Rys.7 Schemat wirnika niewyrównoważonego quasistatycznie [C.C.1982]

**Rozpoznanie zjawisk:**

Rozpoznanie poszczególnych niewyrównoważeń jest możliwe na podstawie obserwacji reakcji dynamicznych. Można tego dokonać obserwując skutki działania tych sił np. przemieszczeń podpór. Można także dokonywać analizy wąskopasmowej sygnału drganiowego polegającej na jednoczesnej akwizycji sygnału z dwóch węzłów łożyskowych wału. Schemat układu pomiarowego został przedstawiony na rys.8

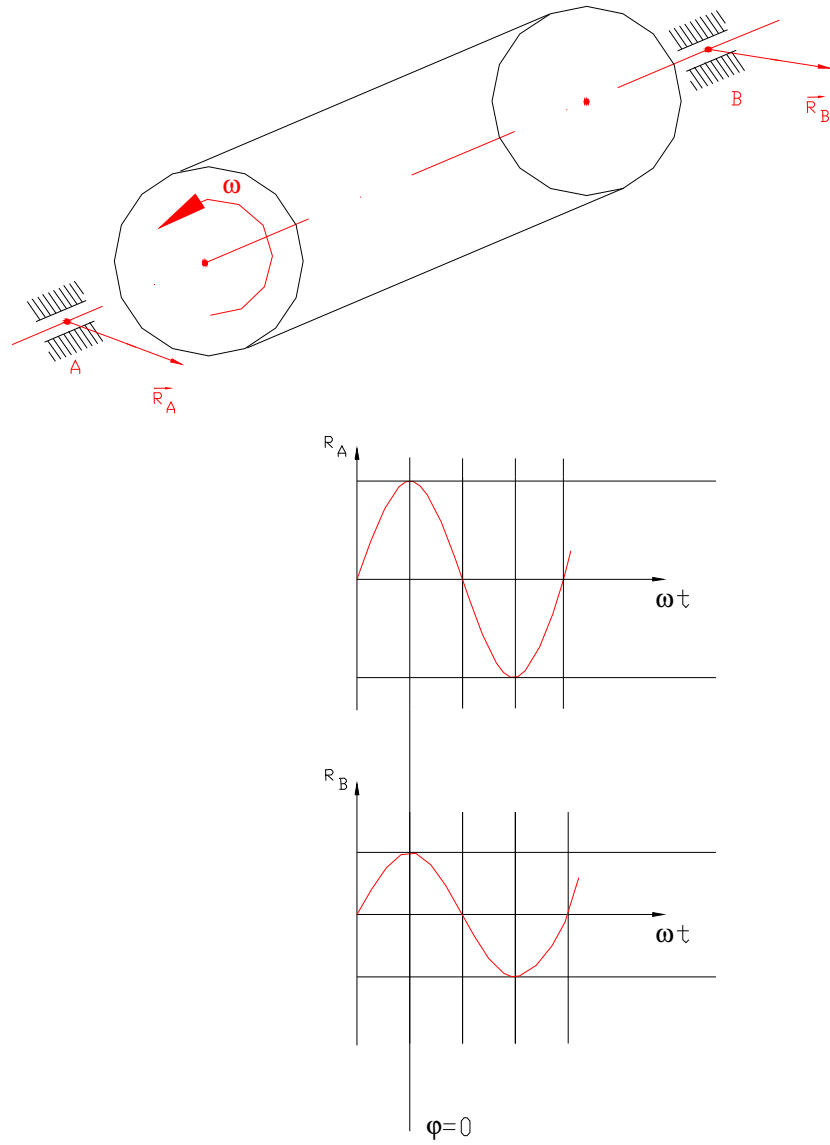


Rys.8 Schemat toru pomiarowego

Dla poszczególnych rodzajów niewyważenia przebieg sił (reakcji) będzie następujący:

**1) Niewyrównoważenie statyczne**

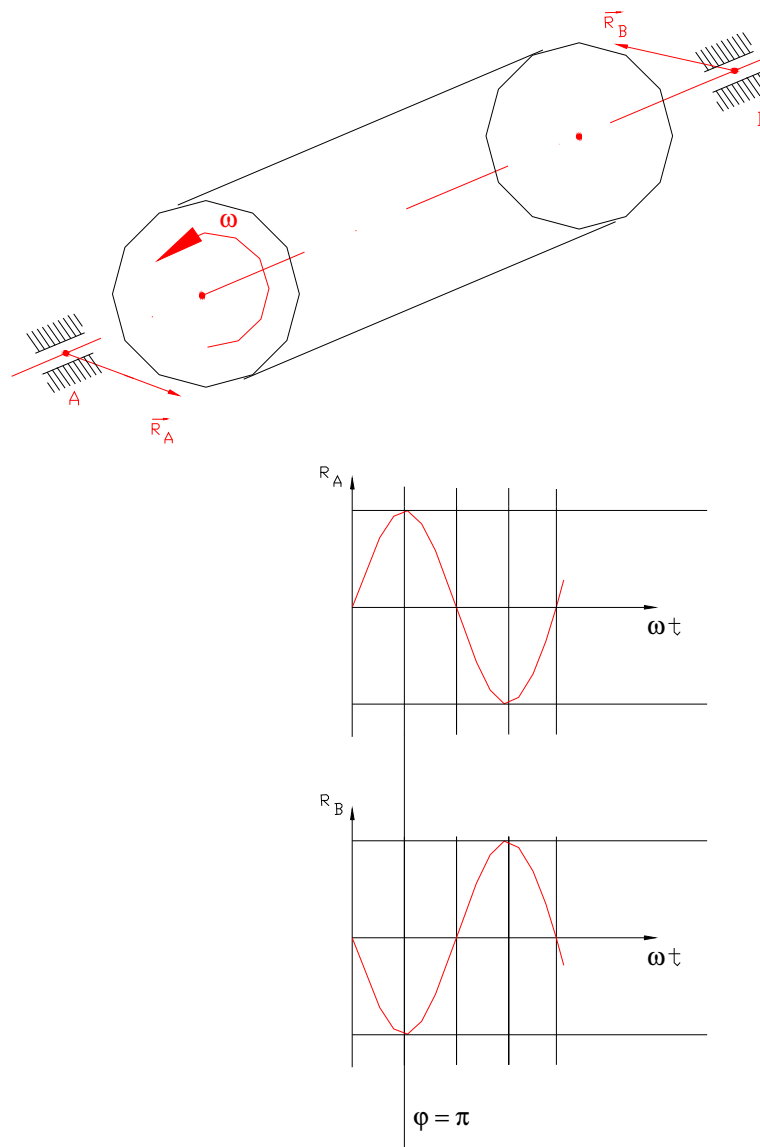
Reakcje  $\vec{R}_A$  i  $\vec{R}_B$  ( $\varphi=0$ ) działają w jednej płaszczyźnie i mają ten sam zwrot. Kąt przesunięcia fazowego  $\varphi$  (oś x) jest równy zero, to znaczy że masy, które zostały umieszczone na wale leżą w tej samej płaszczyźnie. Wartość amplitudy reakcji jest zawarta na osi oznaczonej  $R_A$  i  $R_B$  (oś y), (rys. 9)



$$\varphi = 0$$

Rys. 9 Kierunki reakcji oraz kąt fazowy przy niewyrównoważeniu statycznym [instr. do ćw.1980]

## 2) Niewyrównoważenie momentowe



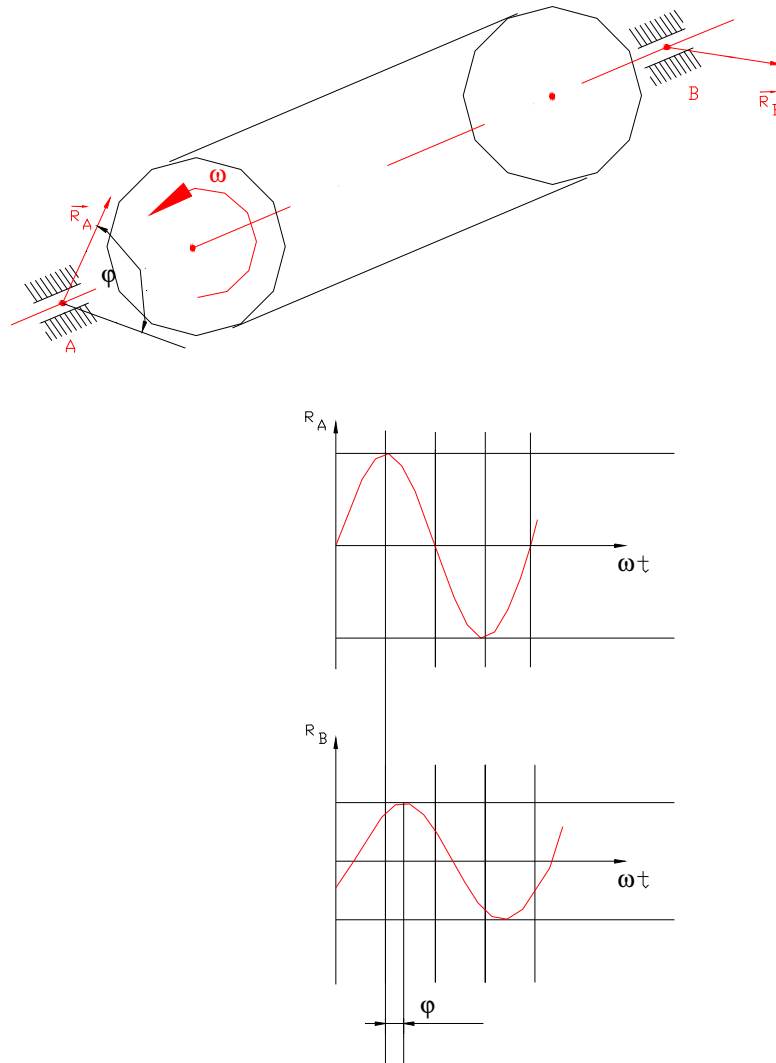
$$|\vec{R}_A| = |\vec{R}_B|, \varphi = \pi$$

Rys. 10 Kierunki reakcji oraz kąt fazowy przy niewyrównoważeniu momentowym [instr. do ćw 1980]

Reakcje  $\vec{R}_A$  i  $\vec{R}_B$  ( $|\vec{R}_A| = |\vec{R}_B|$ ,  $\varphi = \pi$ ) działają w jednej płaszczyźnie i mają przeciwne zwroty (para sił). Kąt przesunięcia fazowego  $\varphi$  (oś x) jest równy  $\pi$ , to znaczy że masy, które zostały umieszczone na wale leżą w tej samej płaszczyźnie pod kątem  $180^\circ$ . Wartość amplitudy reakcji jest zawarta na osi oznaczonej  $R_A$  i  $R_B$ , ich wartość jest jednakowa (oś y), (rys. 10)



### 3) Niewyrównoważenie dynamiczne

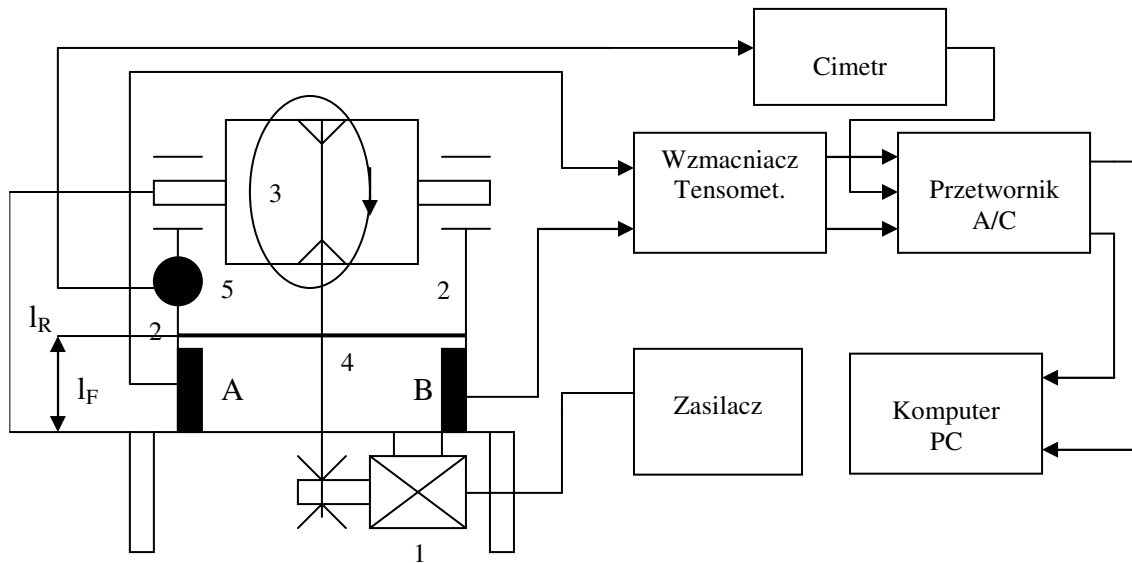


$$\vec{R}_A \neq \vec{R}_B, 0 < \varphi < \pi$$

Rys. 11 Kierunki reakcji oraz kąt fazowy przy niewyrównoważeniu dynamicznym [instr.1980]

Reakcje  $\vec{R}_A$  i  $\vec{R}_B$  ( $R_A \neq R_B, 0 < \varphi < \pi$ ) nie działają w jednej płaszczyźnie. Kąt przesunięcia fazowego  $\varphi$  (oś x) jest zawarty w przedziale  $0 < \varphi < \pi$ , to znaczy że masy, które zostały umieszczone na wale nie leżą w tej samej płaszczyźnie lecz są przesunięte o kąt zawarty w przedziale od  $0 - 180^\circ$ . Wartość amplitudy reakcji jest zawarta na osi oznaczonej  $R_A$  i  $R_B$  (oś y), (rys. 11) [instr. do ćw 1980].

OPIS STANOWISKA



1 – silnik, 2 – podpory, 3 – wirnik, 4 – pasek klinowy, 5 – czujnik cimetru, A i B – tensometry  
 $l_R$  – odległość tensometrów od osi,  $l_F$  - odległość tensometrów od przyłożenia siły

Rys.5.1.3 Schemat stanowiska wraz z torem pomiarowym przed modernizacją

Wirnik 1 bez mas dodatkowych posiada niewielkie niewyrównoważenie statyczne, co można zauważyć po zdjęciu pasa napędowego. Niewyrównoważenie to jest zbyt małe, aby w zakresie obrotów realizowanych przez silnik, uzyskać odpowiednią wielkość i pożądany efekt działania reakcji dynamicznych. W tym ćwiczeniu wielkość niewyrównoważenia dla poszczególnych jego typów realizujemy poprzez dodanie mas w otworach leżących po tej samej tworzącej wirnika (rys.5.1.4). Dla poszczególnych typów niewyrównoważenia na ekranie monitora możemy zauważyć charakterystyczne przebiegi czasowe oraz widoczne przesunięcia fazowe (patrz instrukcja rozdział „Podstawy teoretyczne”). Pomiar wielkości reakcji dynamicznych wykonuje się na drodze elektrycznej. W tym celu na, na belkach wspornikowych 2, na których spoczywa układ wirujący, w odległości  $l_R$  od osi obrotu, naklejono układ tensometrów. Występujące reakcje  $R_A$  i  $R_B$  powodują zginanie belek odpowiednio momentami  $R_A l_R$  oraz  $R_B l_R$ . W miejscu gdzie naklejono tensometry doznają odkształcenia względnego  $\epsilon$ , które określa następująca zależność:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{M_g}{W * E} = \frac{R_{A,B} * l_R}{W * E} \quad (1)$$

gdzie:

$\sigma$  - naprężenie, E – moduł Younga,  $M_g$  – moment zginający, W – wskaźnik wytrzymałości na zginanie

### Przebieg ćwiczenia

#### 1. Sprawdzenie połączeń układu elektrycznego

Gniazda układu tensometrów, oznaczone literami A i B powinny być podłączone za pomocą odpowiednich przewodów do gniazd wzmacniacza WT2K. W przypadku stwierdzenia braku połączenia należy podłączyć gniazdo A1 układu tensometrów z gniazdem A1 wzmacniacza i tak kolejno dalsze punkty obu układów A i B. Silnik podłączamy do zasilacza (typ zasilacza). Sprawdzamy połączenie wzmacniacza (kanały A i B) z przetwornikiem A/C oraz poprawność połączenia przetwornika z komputerem PC. **Prowadzący ćwiczenia sprawdza prawidłowość połączeń.** Po sprawdzeniu połączeń włączyć do sieci zasilacz, wzmacniacz oraz komputer.

#### 2. Montaż czujnika cimetru

Przystępujemy do zamocowania czujnika cimetru na podstawce znajdującej się przy podporze. Następnie podłączamy jego wyjście do cimetru. Cimetr jest połączony z przetwornikiem. Następnie regulujemy ustawienie czujnika cimetru przesuwając go wzdłuż jego uchwytu tak aby uzyskać na cimetrze wychylenie wskaźnika w obu kierunkach czyli „+” oraz „-”.

#### 3. Sporządzanie charakterystyki układu (wyznaczenie współczynnika $\alpha$ )

Zamocować pręt na podporach A i B. Uruchamiamy program „REDYSK” i przechodzimy do okna „Charakterystyka układu”. W środku pręta łączącego belki A i B przyłożyć za pomocą dynamometru, siłę F prostopadłą do płaszczyzny belek A i B. Wtedy każda z belek będzie obciążona siłą F/2. Zadać kilka sił z zakresu dynamometru w kierunku dodatnim i ujemnym po czym wykonać wykres regresji. Wyniki zapisać w postaci pliku tekstowego i dokonać wydruku wykresu (patrz

„Pomoc” programu „REDYSK”). Po przeprowadzonej kalibracji układu zdemontować czujnik cimetru oraz pręt łączący podpory A i B.

#### 4. Badanie reakcji dynamicznych

Przechodzimy do okna „Pomiar reakcji dynamicznych”. Modelujemy pierwszy rodzaj niewyrównowazenia poprzez umieszczenie w otworach dodatkowych mas. Uruchamiamy zasilacz i nastawiamy go na napięcie około 20[V]. Dokonujemy odczytu wartości napięć na kanale A i B oraz obliczamy wartość przesunięcia kąta fazowego. Tak postępujemy w przypadku wszystkich trzech typów niewyrównowazenia (patrz „Pomoc” programu „REDYSK”). Wyznaczyć wartości reakcji  $R_A$  i  $R_B$  za pomocą wzoru (2), oraz określić wartość kąta przesunięcia fazowego dla poszczególnych typów niewyrównowazenia (3). Wypełnić czytelnie formularz załączony do ćwiczenia wraz z wydrukami.

#### 5. Wyznaczona zależność (2) pozwala na określenie wartości reakcji dynamicznych występujących w podporach stanowiska.

$$R_A = F_A \frac{l_F}{l_R} = \alpha * \delta_A V_{MA} * \frac{l_F}{l_R} [N] \quad (2)$$

$$R_B = F_B \frac{l_F}{l_R} = \alpha * \delta_B V_{MB} * \frac{l_F}{l_R} [N]$$

gdzie:

$F_A$  – wartość zadanej siły,  $l_F$  - odległość tensometrów od przyłożenia siły,  $l_R$  – odległość tensometrów od osi,  $\alpha$  - współczynnik,  $\delta_{A,B}$  - stałe liczbowe,  $V_{MA,MB}$  – wartości amplitudy.

Dla obliczenia wartości przesunięcia kąta fazowego wyprowadzona została zależność (3)

$$\varphi = \frac{t360^\circ}{T} [^\circ] \quad (3)$$

gdzie:

t – czas między dwoma okresami (między kanałem A i kanałem B), T - okres

6. Oszacowanie błędu pomiarowego

- metoda różniczki zupełnej,

$$R_A = F_A \frac{l_F}{l_R} = \alpha \delta_A V_{MA} \frac{l_F}{l_R} [N]$$

$$\begin{aligned} \Delta R_A &= \left| \frac{\partial R_A}{\partial \alpha} \right| \Delta \alpha + \left| \frac{\partial R_A}{\partial \delta_A} \right| \Delta \delta_A + \left| \frac{\partial R_A}{\partial V_{MA}} \right| \Delta V_{MA} + \left| \frac{\partial R_A}{\partial l_F} \right| \Delta l_F + \\ &+ \left| \frac{\partial R_A}{\partial l_R} \right| \Delta l_R \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Delta R_A &= \left| \delta_A V_{MA} \frac{l_F}{l_R} \right| \Delta \alpha + \left| \alpha V_{MA} \frac{l_F}{l_R} \right| \Delta \delta_A + \left| \alpha \delta_A \frac{l_F}{l_R} \right| \Delta V_{MA} \\ &+ \left| \frac{\alpha \delta_A V_{MA}}{l_R} \right| \Delta l_F + \left| -\frac{1}{l_F^2} \alpha \delta_A V_{MA} l_F \right| \Delta l_R \end{aligned}$$

$$R_B = F_B \frac{l_F}{l_R} = \alpha \delta_B V_{MB} \frac{l_F}{l_R} [N]$$

$$\begin{aligned} \Delta R_B &= \left| \frac{\partial R_B}{\partial \alpha} \right| \Delta \alpha + \left| \frac{\partial R_B}{\partial \delta_B} \right| \Delta \delta_B + \left| \frac{\partial R_B}{\partial V_{MB}} \right| \Delta V_{MB} + \left| \frac{\partial R_B}{\partial l_F} \right| \Delta l_F + \\ &+ \left| \frac{\partial R_B}{\partial l_R} \right| \Delta l_R \end{aligned} \quad (5)$$

$$\Delta R_B = \left| \delta_B V_{MB} \frac{l_F}{l_R} \right| \Delta \alpha + \left| \alpha V_{MB} \frac{l_F}{l_R} \right| \Delta \delta_B + \left| \alpha \delta_B \frac{l_F}{l_R} \right| \Delta V_{MB}$$

$$+ \left| \frac{\alpha \delta_B V_{MB}}{l_R} \right| \Delta l_F + \left| -\frac{1}{l_F^2} \alpha \delta_B V_{MB} l_F \right| \Delta l_R$$

- metoda różniczki logarytmicznej

$$R_A = F_A \frac{l_F}{l_R} = \alpha \delta_A V_{MA} \frac{l_F}{l_R} [N]$$

$$\ln R_A = \ln \alpha + \ln \delta_A + \ln V_{MA} + \ln \frac{l_F}{l_R}$$

$$\frac{\Delta R_A}{R_A} = \left| \frac{\Delta \alpha}{\alpha} \right| + \left| \frac{\Delta \delta_A}{\delta_A} \right| + \left| \frac{\Delta V_{MA}}{V_{MA}} \right| + \left| \Delta \frac{l_F}{l_R} \frac{l_R}{l_F} \right| \quad (6)$$

$$R_B = F_B \frac{l_F}{l_R} = \alpha \delta_B V_{MB} \frac{l_F}{l_R} [N]$$

$$\ln R_B = \ln \alpha + \ln \delta_B + \ln V_{MB} + \ln \frac{l_F}{l_R}$$

$$\frac{\Delta R_B}{R_B} = \left| \frac{\Delta \alpha}{\alpha} \right| + \left| \frac{\Delta \delta_B}{\delta_B} \right| + \left| \frac{\Delta V_{MB}}{V_{MB}} \right| + \left| \Delta \frac{l_F}{l_R} \frac{l_R}{l_F} \right| \quad (7)$$

7. Oszacowanie błędu pomiarowego kąta fazowego:

$$\varphi = \frac{t360^\circ}{T}$$
$$\Delta\varphi = \left| \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right| \Delta t + \left| \frac{\partial\varphi}{\partial T} \right| \Delta T \quad (8)$$

$$\Delta\varphi = \left| \frac{360^\circ}{T} \right| \Delta t + \left| -\frac{t360^\circ}{T^2} \right| \Delta T \quad (9)$$

WARTOŚCI BŁĘDU POMIAROWEGO

$$\Delta F = \pm 0,5 \text{ [N]}$$

$$\Delta\alpha = \pm \text{niepewność stałej } \alpha \text{ [N/mm]}^*$$

$$\Delta\delta_A = \pm 0,19$$

$$\Delta\delta_B = \pm 0,11$$

$$\Delta V_{MA,MB} = \pm 0,0005 \text{ [V]}$$

$$\Delta l_F, l_R = \pm 0,5 \text{ [mm]}$$

$$\Delta t = \Delta T = 1/f_p \text{ [s]}^{**}$$

\* niepewność stałej  $\alpha$  wskazywana jest przez program „REDYSK” po obliczeniu regresji liniowej i odpowiada ona niepewności stałej w programie oznaczonej jako a.

\*\* $f_p$  – jest wybraną częstotliwością próbkowania sygnału

**UWAGA:**

Pełna obsługa programu wraz z ilustracjami i wskazówkami jak dokonać pomiarów jest zawarta w „Pomocy” programu „REDYSK”. Aby wykonać prawidłowo ćwiczenie stosuj się do wskazówek w niej zawartych.